Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire.

Sophie Gobert

UNIVERSITÉ PARIS 7 – DENIS DIDEROT
UFR Didactique des disciplines

THÈSE

Pour l'obtention du Diplôme de
Docteur de l'Université de Paris 7

Spécialité : Didactique des mathématiques

présentée par
Sophie GOBERT
le 18 décembre 2001

Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire.

Directeur de thèse :
Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN

Composition du jury

G. BROUSSEAU, Professeur émérite des Universités, Université de Bordeaux I — **Rapporteur**

B. PARZYSZ, Professeur des Universités, IUFM Orléans-Tours — **Rapporteur**

F. COLMEZ, Maître de Conférences, Université Paris 7 Denis Diderot

R. DUVAL, Professeur des Universités, Université du Littoral et IUFM Nord-Pas-de-Calais

A. ROUCHIER, Professeur des Universités, IUFM d'Aquitaine

M-J. PERRIN-GLORIAN, Professeur des Universités, Université d'Artois et IUFM Nord-Pas-de-Calais

UNIVERSITÉ PARIS 7 – DENIS DIDEROT
UFR Didactique des disciplines

THÈSE

Pour l'obtention du Diplôme de
Docteur de l'Université de Paris 7

Spécialité : Didactique des mathématiques

présentée par
Sophie GOBERT
le 18 décembre 2001

Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire.

Directeur de thèse :
Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN

Composition du jury

G. BROUSSEAU, Professeur émérite des Universités, Université de Bordeaux I — **Rapporteur**

B. PARZYSZ, Professeur des Universités, IUFM Orléans-Tours — **Rapporteur**

F. COLMEZ, Maître de Conférences, Université Paris 7 Denis Diderot

R. DUVAL, Professeur des Universités, Université du Littoral et IUFM Nord-Pas-de-Calais

A. ROUCHIER, Professeur des Universités, IUFM d'Aquitaine

M-J. PERRIN-GLORIAN, Professeur des Universités, Université d'Artois et IUFM Nord-Pas-de-Calais

Remerciements

Je remercie Marie-Jeanne Perrin pour avoir accepté de suivre mon travail, pour sa confiance et ces conseils éclairés.
Merci à Messieurs Guy Brousseau et Bernard Parzysz pour avoir accepté d'être rapporteurs, et Messieurs François Colmez, Raymond Duval, et André Rouchier, d'être membres du jury.
Merci à Marie-Hélène Salin et René Berthelot dont les travaux ont inspiré ma recherche, et à tous ceux dont les recherches, citées ici, ont permis d'approfondir cette étude.
Merci à l'INRP et au Conseil Scientifique et Pédagogique de l'IUFM de Créteil pour avoir facilité l'organisation de mon travail.
Merci à mes collègues d'IUFM des centres de Livry-Gargan et d'Aix-Marseille pour nos échanges fructueux, et tout particulièrement Muriel Fénichel et Marcelle Pauvert, qui ont guidé mes premiers pas en formation des maîtres.
Merci à tous les maîtres formateurs dont les enseignements ont nourri ma réflexion, particulièrement Annie Cabrera, Isabelle Pelletier-Lécullé, et Serge Itzkovich.
Merci à tous les étudiants, les enseignants, les élèves, ayant participé au cours de ces cinq années aux divers travaux dont il est rendu compte dans cette recherche.
Merci à Nathalie pour ses témoignages d'attention.
Je remercie ma petite et grande famille pour son soutien constant.

Nous ne délions le faisceau que pour gagner la liberté de le reformer de façon plus consciente, plus étroite et plus idoine.

Ferdinand Gonseth

INTRODUCTION

« Qu'est-ce que faire de la géométrie ? »

Non pas « qu'est-ce que la géométrie ? ». Cette question sera naïvement supposée résolue en se plaçant dans le cadre de la géométrie euclidienne. Mais « qu'est-ce que faire de la géométrie ? ».

Tout le monde reconnaît qu'Euler fait de la géométrie lorsqu'il démontre l'alignement de l'orthocentre, du centre de gravité, et du centre du cercle circonscrit d'un triangle. Mais lorsque Thalès met au point un modèle permettant de mesurer la hauteur des pyramides, fait-il de la géométrie ?

Il n'est pas évident que l'on s'accorde tous sur une réponse. Pour notre part, nous serons affirmative. Il est important de distinguer ces deux modes de production de savoirs géométriques : une production externe au corpus de connaissances, basée sur l'élaboration d'un modèle, modèle pour traiter des problèmes concrets et notamment des problèmes de mesures ; et une production interne au corpus de connaissances, basée sur un raisonnement, des règles de déduction spécifiques permettant d'établir une nouvelle propriété.

Historiquement, c'est le premier mode de production qui est à l'origine de la géométrie euclidienne, se constituant au fur et à mesure en corpus de connaissances autonomes, qui muni de certaines règles de raisonnement permettra d'obtenir de nouveaux savoirs.

Deux aspects de la géométrie apparaissent ici, déjà bien connus et souvent mis en conflit dans l'histoire de la géométrie :

- La géométrie comme modèle de l'espace, et faire de la géométrie serait alors produire des modèles géométriques.

- La géométrie comme mode de discours spécifique lié à un ensemble de connaissances organisées, et faire de la géométrie serait alors produire des savoirs géométriques selon ce discours.

Qu'en est-il de cette approche de la géométrie dans le cadre de l'institution scolaire, et plus particulièrement à l'école élémentaire ? Le corpus de connaissances y est déjà constitué et désigné par l'institution, alors **qu'est-ce que faire de la géométrie à l'école ?**

Il ne s'agit plus de produire des savoirs géométriques, mais de les enseigner pour les maîtres et de les apprendre pour les élèves.

Faire de la géométrie à l'école, pour les élèves, peut être alors :

- Apprendre des savoirs géométriques
- Apprendre à raisonner sur ces savoirs
- Apprendre à utiliser ces savoirs pour résoudre des problèmes, qui peuvent être des problèmes de géométrie, ou des problèmes pratiques.

Evidemment ces points se déclinent sur le papier de façon linéaire, mais font appel les uns aux autres de manière bien enchevêtrée .

Nouvelle question : ces apprentissages, à l'école, dans quel but ? Devenir géomètre ? Devenir savant en géométrie ? Devenir capable d'utiliser des savoirs géométriques ? Devenir capable de raisonnements analogues à ceux pratiqués en géométrie ?
Sans entrer dans un débat épistémologique et philosophique sur l'enseignement de la géométrie, nous retiendrons deux aspects :

- Nous supposons que certaines connaissances sont nécessaires à l'entrée dans la géométrie du second degré, connaissances qui peuvent être prises en charge et développées dès l'école élémentaire. Un premier objectif concerne alors le développement de ces apprentissages pour l'étude et la pratique de la géométrie au collège et au lycée.

- Le second objectif concerne l'apprentissage de connaissances de géométrie pour tous, dans la mesure où elles sont utiles à la maîtrise de situations de vie courante ou professionnelles.

Parce que les situations de géométrie au collège et au lycée requièrent des connaissances qui ne sont pas géométriques, mais liées à la prise en compte d'une différenciation d'espace : l'espace sensible et l'espace géométrique ;
parce que les situations à l'école élémentaire mettent avant tout les élèves en contact avec l'espace sensible, et que c'est avec la prise en compte de cet espace que les premiers apprentissages géométriques vont devoir se mettre en place ;
notre étude va porter sur les questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire ou à l'articulation de l'école et du collège.

Pour mener à bien ce travail, nous nous inscrirons dans la suite des travaux entrepris par M-H. Salin et R. Berthelot sur « l'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire »[1]. Dès à présent reprenons avec eux quelques précisions.

> « Par spatial nous entendons ce qui est relatif à l'espace dans lequel tout individu doit savoir agir de façon pertinente, en exploitant et/ou en anticipant les rétroactions de l'environnement (qu'il adapte ou modifie éventuellement).
> Par connaissances spatiales nous désignons les connaissances que peut décrire la géométrie, et qui permettent à chacun de maîtriser l'anticipation des effets de ses actions sur l'espace, leur contrôle, ainsi que la communication d'informations spatiales. » (p9)

Résumons un point particulier de leur étude, portant sur la distinction entre les connaissances spatiales et les connaissances géométriques, et qui justifie en amont notre recherche[2].
Les connaissances spatiales prennent naissance très tôt chez l'enfant et de manière « naturelle », alors que la confrontation avec des connaissances géométriques est essentiellement de nature scolaire.
D'autre part, même si historiquement certaines connaissances géométriques ont émergé à partir de résolutions de problèmes pratiques, il est une différence fondamentale de nature entre connaissances spatiales et connaissances géométriques : les premières prennent racine dans une réalité spatiale, les secondes dans une théorie mathématique.
De là découle une distinction des types de problèmes mettant en jeu ces connaissances, ainsi que de leur validation, essentiellement empirique dans un cas, et démonstrative dans l'autre.
Ceci dit ces deux types de connaissances sont liés et peuvent intervenir à différents moments de la résolution d'un problème.

Voici donc une des questions que nous reprenons comme question de recherche : quelle est l'articulation entre les connaissances développées spontanément dans nos rapports à l'espace sensible et les connaissances géométriques sous-jacentes à une modélisation de ces rapports par la géométrie ?

Nous nous appuierons sur une même hypothèse de travail que M-H. Salin et R. Berthelot :

---

[1] Titre de leur thèse soutenue en 1992. En l'absence d'une autre référence bibliographique, les numéros de pages donnés en fin de citations renvoient à cet ouvrage, et cela pour l'ensemble de notre travail.

[2] Les contenus de ce résumé sont rassemblés par M-H. Salin et R. Berthelot dans un article paru dans la revue Grand N n°53, intitulé *L'enseignement de la géométrie à l'école primaire.*

« Les concepts de la géométrie s'élaborent bien avant d'être étudiés comme des objets de la géométrie, fonctionnent et sont opératoires dans des situations spatiales, pour lesquelles ils sont des outils permettant d'élaborer des solutions spatiales. Initier à la géométrie c'est construire un milieu propice à l'élaboration future de certains savoirs, en faisant reposer le fonctionnement de certains concepts géométriques sur des connaissances spatiales qui elles, s'établissent au cours de la scolarité à l'école primaire. »

Cette précision permet de formuler plus clairement un premier axe de notre problématique :
Faire de la géométrie à l'école consiste à apprendre des connaissances de géométrie et apprendre que ces connaissances sont utiles pour résoudre des problèmes spatiaux.
Ces connaissances s'articulent avec des connaissances spatiales spontanément mises en œuvre par les élèves. Quelles sont les interactions entre ces deux types de connaissances ? Et comment favoriser cette articulation dans le contexte scolaire ?

En ce qui concerne l'apprentissage des connaissances de géométrie, nous étudierons outre des situations de recherche, des situations qui ne sont pas des activités de résolution de problèmes pour les élèves, mais constituent plutôt des situations d'expérimentation dans le spatial de phénomènes qui peuvent se dire géométriquement. Nous tenterons alors de voir comment **un appui maîtrisé sur des expériences spatiales et des manipulations permet de bâtir des situations d'apprentissage de propriétés géométriques**. Ce point constituera un second axe de notre problématique.

Poursuivons le regard sur une partie du travail de M-H. Salin et R. Berthelot, pour formuler une troisième question.
A travers l'étude des programmes et des instructions officielles, ils constatent la disparition progressive des contenus d'enseignement relatifs aux connaissances spatiales. Celles qui étaient justifiées dans un but professionnel (arpentage, métiers utilisant le dessin technique ...) ont disparu maintenant de l'école primaire, les autres ne relèvent plus actuellement des mathématiques mais d'autres disciplines comme la géographie par exemple pour la lecture de plans, de cartes ...
Seules les connaissances relevant de la géométrie ont perduré dans les programmes. Justifiées avant les années 70 par des objectifs professionnels, elles deviennent légitimes maintenant comme *lieu d'exercice de « la pensée mathématique »*.

Puisque le développement des connaissances spatiales de base est *« très largement laissé au hasard »*, il n'en existe aucune évaluation par le système, M-H. Salin et R. Berthelot regardent certains résultats obtenus dans des recherches relatives à ce sujet :

Les travaux de G. Galvez (1985) sur les apprentissages liés à la maîtrise des déplacements dans un espace urbain ; les travaux de Weill-Fassina et Rachedi sur la mise en relation d'un espace réel et de sa figuration sur un plan, ceux de Rabardel et Vérillon sur l'apprentissage du dessin technique, et d'autres rassemblés dans les deux ouvrages fédérateurs de ces thèmes « Espaces graphiques et graphismes d'espaces »[3] et « le dessin technique »[4] ; les travaux de B. Parzysz et F. Colmez (1983) sur la géométrie dans l'espace ; pour ne citer que certains d'entre eux.
Tous mettent en évidence à différents niveaux (fin école primaire, collège, lycée, adultes en formation) des difficultés de mise en correspondance d'un objet ou d'un espace avec des représentations planes de ceux-ci. Les connaissances en jeu dans cette articulation font partie des connaissances spatiales. Elles ne se développent pas naturellement et nécessitent des apprentissages.

Ce dernier point entre directement dans les deux objectifs généraux déjà annoncés concernant l'école élémentaire : des apprentissages pour la géométrie, et des apprentissages pour tous.
Les apprentissages dont il est fait mention précédemment portent essentiellement sur la lecture et l'écriture de plans, la lecture et l'écriture de représentations planes d'objets, le changement de point de vue sur un objet ou ses représentations, des connaissances que l'on retrouve dans divers domaines de formation professionnelle et de pratiques sociales... Et d'autre part ils sous-tendent les connaissances non formulées qui permettent de « voir dans l'espace » et de traiter des problèmes de géométrie dans l'espace du collège et du lycée.
A cela s'ajoutent les questions soulevées par l'usage des figures en géométrie plane.
Nous rassemblerons ces représentations sous le terme d'images, au sens propre du terme, au sens des images que l'on peut voir dans un magazine, des images de télévision, des images photographiques, ... ce sont également des images, et dans la mesure où elles sont utilisées en géométrie et que les règles d'élaboration sont modélisées en géométrie, nous les appellerons *des images de géométrie.*
Le troisième axe de notre problématique est alors :
Faire de la géométrie à l'école implique l'usage d'images de géométrie. Quelle est la prise en compte du traitement de ces images dans l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire ? Nous distinguerons ce qui relève de la géométrie plane, des aspects liés à la géométrie dans l'espace.

---

[3] Coll. (1992) *Espaces graphiques et graphismes d'espaces,* ouvrage coordonné par A. Bessot et P. Vérillon, Ed. La pensée sauvage.

[4] Coll. (1987) *Le dessin technique,* sous la direction de P. Rabardel et A. Weill-Fassina, Ed. Hermès, Paris.

<u>En résumé</u>

La problématique générale de notre travail est la prise en compte de l'articulation du spatial et du géométrique dans l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire avec trois axes d'analyse. Bien que liés, nous devons les formuler et les étudier séparément :

- La géométrie comme modèle de l'espace : quelles situations mettre en place, comment se fait l'articulation des connaissances spatiales et géométriques, quelles sont les questions à prendre en compte ?
- L'expérience spatiale pour la mise en évidence de savoirs géométriques ; pour une ostension maîtrisée.
- L'usage des dessins dans l'enseignement de la géométrie, quelle prise en compte d'un nécessaire traitement de ces images ?

L'organisation générale de l'étude de ces trois points se présente dans l'ordre inverse de la présentation dans l'encadré : ainsi, après une première partie précisant nos cadres théoriques et questions de recherche, la seconde partie sera centrée sur l'étude de l'usage des dessins en géométrie, comme un problème d'articulation du spatial et du géométrique. La troisième partie sera consacrée à deux exemples de thèmes traités à l'école élémentaire pour lesquels la mise en place de situations d'expérimentions spatiales permettent de mettre en évidence des connaissances de géométrie, sous réserve d'un certain contrôle de variables pour maîtriser un procédé didactique d'ostension. La quatrième partie rassemblera les travaux menés autour de l'étude théorique et expérimentale d'une situation conçue comme situation fondamentale de la géométrie comme de modélisation de l'espace.

Plan général

Première partie

Cadres théoriques, positions et questionnements pour la recherche

CHAPITRE 1

CADRES THÉORIQUES, POSITIONS ET QUESTIONNEMENTS POUR LA RECHERCHE

Pour la problématique générale de l'articulation du spatial et du géométrique, nous serons guidée par M-H. Salin et R. Berthelot (par la suite noté S&B) qui en ont théorisé les questions sous-jacentes, et développent des outils d'analyse leur permettant d'approfondir ces questions ou d'en apporter des éléments de réponse. Dans la mesure où notre travail s'inscrit dans le prolongement de ces recherches, une partie importante de nos cadres théoriques se définit à la lecture de leurs travaux.

Ce chapitre débutera par la présentation d'outils : le cadre de la théorie des situations, et en particulier une présentation de la notion de milieu. Ensuite seront exposées les problématiques pratique, de modélisation, et géométrique, ainsi que leur articulation cernée par S&B.
Dans un troisième paragraphe nous étudierons les situations de modélisation pour déjà poser les préalables théoriques aux expérimentations que nous menons dans les parties suivantes. Seront précisées dans un quatrième temps les notions de micro méso macro espace, outils pour lesquels une certaine clarification s'impose.
C'est au cours de ces divers paragraphes que nos propres positionnements se dégageront, ainsi que les hypothèses de travail et les questions de recherche. Dans le cinquième paragraphe nous présenterons notre plan d'étude et notre méthodologie.

Plan du chapitre

I. Eléments de la théorie des situations : des critères d'analyse des situations didactiques

Quelques réflexions[1] du fondateur de la théorie des situations pour une entrée en matière :

> « On a culturellement l'habitude de confondre la géométrie avec l'espace, et de trouver transparents les rapports qu'ils entretiennent. Or il faut renoncer à cette idée là, la géométrie est effectivement le moyen culturel de repérer ce qui est spatial, ce qui est de l'ordre de l'espace, mais la géométrie des mathématiciens s'est enrichie de très nombreuses réflexions utiles ou inspirées de ce premier problème et qui n'ont plus grand rapport avec nos propres rapports avec l'espace. La géométrie, c'est un objet culturel, et c'est ce moyen culturel que nous utilisons pour repérer nos rapports avec l'espace ; mais nos propres rapports avec l'espace ce n'est pas de la géométrie, c'est autre chose. L'espace pour un individu, ses rapports avec son environnement, les connaissances qu'il développe naturellement pour gérer ses rapports avec l'espace, ne sont pas des transcriptions de connaissances géométriques. Il faut partir à la base sur cette idée que ce sont deux objets différents. Donc on se servira de la géométrie éventuellement pour décrire quelque chose qui se passe dans l'espace, mais cela ne veut pas dire que c'est cela qui est conçu par le sujet comme moyen d'intervenir dans l'espace.
> [...]
> La théorie des situations permet de décrire les relations d'un sujet avec les objets de l'espace. Les connaissances spatiales du sujet peuvent être définies par le rôle qu'elles jouent dans les interactions avec les éléments spatiaux de son milieu. Cette définition fonctionnelle des connaissances spatiales ne postule pas que les connaissances des élèves sont conformes ni même « contenues » dans les connaissances de géométrie, mais elle permet de prévoir et d'expliquer les adaptations du sujet et donc ses apprentissages, du moins ceux qui font appel à ses capacités d'adaptation. »

Voici une première approche de la notion de milieu, approche environnementale, avec lequel l'élève entre en interaction, et va développer certaines connaissances lui permettant de s'adapter à ce milieu.

1. Le milieu de la situation didactique

Dans l'article de référence[2] à cette notion, G. Brousseau développe l'idée importante qui sous-tend la théorie des situations : la nécessité de construire des savoirs qui soient utiles pour

---

[1] G. Brousseau, lors d'une intervention au séminaire DIDIREM, janvier 1999, Paris. Des extraits de cette intervention sont transcrits en annexe 1.

un sujet à la maîtrise de ses rapports à l'environnement en général. Et un des critères pour élaborer ces connaissances dans un cadre didactique, est de recréer un environnement tel que l'élève dans la situation puisse développer ces connaissances. Une des hypothèses de base est la nécessité d'un rapport adidactique au sein de la situation didactique.
Précisons en reprenant une citation :

> « L'objectif final de l'apprentissage est que l'élève puisse faire fonctionner ce savoir dans des situations où l'enseignant aura disparu. D'où la distinction d'un fonctionnement didactique et d'un fonctionnement adidactique de l'élève, dans la classe.
> Les connaissances enseignées et les savoirs communiqués doivent permettre à l'élève d'entrer dans toutes les situations et pratiques sociales non didactiques comme sujet majeur et non en tant qu'élève. Ceci implique, d'une part, que l'enseignant dégage progressivement les situations qu'il propose à l'élève autour d'une notion de leurs présupposés didactiques, d'autre part qu'il reconnaisse ce milieu adidactique comme territoire de référence culturelle et de fonctionnement des savoirs qu'il enseigne. »[3]

S&B retiennent comme outil d'analyse des situations didactiques et comme critère de pertinence pour l'élaboration des situations **ce caractère adidactique des situations.**

> « A l'intérieur d'une situation didactique (donc organisée par le maître pour un certain enseignement), le terme de situation adidactique désigne toute situation (finalisée par un résultat) qui d'une part ne peut être maîtrisée de façon convenable sans la mise en œuvre des connaissances ou du savoir visé et qui d'autre part sanctionne, sur le mode de l'évidence pour l'élève, les décisions qu'il prend (bonnes ou mauvaises) sans intervention du maître relativement au savoir à mettre en œuvre. » (p45)

Une hypothèse forte sur laquelle repose la théorie des situations est précisée par S&B :

> « Le développement de rapports adidactiques avec le milieu garantit une qualité des apprentissages liée au fait que les élèves sont capables de donner un sens proche de celui des pratiques de références (spatiales ou géométriques) aux connaissances élaborées dans ce cadre. »

Un autre critère important dans l'étude des interactions des élèves avec le milieu est le caractère effectif ou évoqué des interactions avec ce milieu. S&B renvoient ici à une

---

[2] BROUSSEAU G. (1988) *Le contrat didactique : le milieu,* RDM Vol. 9.3.

[3] ibidem p322-323

distinction classique déjà mentionnée par Piaget, entre actions effectives et actions symboliques ou actions mentales, celles réalisées en pensée.
Les connaissances géométriques sont des outils permettant de prévoir, d'anticiper certaines actions. Le fait qu'à un moment donné d'une situation on ne puisse plus agir directement sur le milieu, mais qu'il soit nécessaire d'anticiper les actions à effectuer, peut être une piste pour penser les apprentissages.

Dans la formation du concept de milieu, en tant que ce qui est recréé par le maître comme « système antagoniste à l'élève »[4], il reste à préciser ce que sont les objets du milieu. Que met-on dans le modèle « milieu » en interaction avec l'élève ?
Reprenons quelques questions de D. Fregona s'intéressant aux « figures planes comme milieu pour l'enseignement de la géométrie »[5],

> « Quels types d'objets intègrent un milieu ? Des objets concrets, ou bien des objets évoqués qui sont déjà connus des élèves, ou tous les objets "présents" qu'ils aient ou pas une relation avec l'objet de l'enseignement, ou les connaissances institutionnalisées pertinentes à l'enjeu de l'enseignement, ou les états permis et les règles de jeu ... Ce connecteur "ou", exclut-il les différents types d'objets caractérisés dans chaque terme ?
> Cet élément appelé "milieu" est-il stable pour tous les acteurs de la relation didactique et pour toute situation quelle que soit son évolution ? Est-ce que tout "l'environnement immédiat de l'élève" fait partie du milieu ? »

C'est au travers des différentes situations étudiées ultérieurement que nous envisagerons la variété des possibilités, et non dans la tentative d'une élaboration théorique, que nous répondrons à ces questions.

Pour approfondir la reprise des éléments théoriques concernant la notion de milieu, nous nous appuierons également sur le travail de C. Margolinas[6] reprenant le travail de Guy Brousseau sur la structuration du milieu.

2. La structuration du milieu

---

[4] ibidem p320

[5] FREGONA D. (1995) *Les figures planes dans l'enseignement de la géométrie,* Thèse, Université Bordeaux I, Ed. IREM d'Aquitaine, p19.

[6] MARGOLINAS C. (1995) *La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations,* Les débats de didactique des mathématiques, Ed. La pensée sauvage.

Indiquons en préambule une remarque faite par C. Margolinas à la suite du tableau de visualisation de la structuration du milieu présenté ci-dessous :

> « **Il ne s'agit pas d'une description de situations temporellement successives, mais de *positions* que les sujets peuvent prendre, de façon effective ou intériorisée, *dans le temps de la situation didactique*** (même si l'on peut considérer que certaines phases d'une situation didactique [...] sont plus ou moins caractérisées par des situations de niveaux différents. »
> (en gras c'est nous qui soulignons)
> « La notion de "position" peut être complétée par celle de "point de vue" : comme dans un véritable oignon, les niveaux sont translucides, et le point de vue de E-3 [l'élève en position objective], par exemple, va rendre tout à fait opaque la position E-1 [l'élève en position d'apprenant], alors qu'il aperçoit la position E-2 [l'élève en position d'agissant]. »[7]

Pour voir l'oignon dans le tableau suivant, il faut en connaître les règles de lecture qui sont :
Mn+1=Sn le milieu à un niveau donné correspond à la situation au niveau inférieur ;
Sn={Mn, En, Pn} la situation est constituée des interactions entre le milieu, l'élève et le professeur, à ce niveau donné.

milieu	*élève*	*professeur*	*situation*
Milieu matériel	Position objective		S. objective
Milieu objectif	Position agissante		*S. de référence*
Milieu de référence	Position apprenante	Position d'observateur	*S. d'apprentissage*
Milieu d'apprentissage	Position d'élève	Position de professeur	*S. didactique*
Milieu didactique	Position réflexive	Position de projeteur	*S. de projet*
Milieu de projet		Position de constructeur	*S. de construction*
Milieu de construction		Position noosphérienne	*S. noosphérienne*

Plusieurs milieux apparaissent, ou plutôt la notion de milieu permet de modéliser différentes strates dans le processus enseignement-apprentissage.

Dans la mesure où nous allons essentiellement nous intéresser aux parties adidactique et didactique, reprenons pour mieux cerner cet aspect des choses la synthèse qu'en donnent S&B :

> « Les rapports effectifs vont donc correspondre à ce niveau du milieu désigné par ***"milieu objectif"***, constitué du système antagoniste du sujet agissant [...] constitué du milieu matériel [...] et des autres partenaires [...]. La situation d'interaction avec le milieu objectif, est

[7] Ibidem p98

désignée comme ***"situation de référence"*** ; elle est caractérisée par un ensemble d'***états*** du jeu rendus ***possibles*** par la ***règle*** du jeu qui fixe les rapports effectifs entre les sujets et le milieu objectif. La structuration des états en tactiques ou stratégies est effectuée par le sujet, qui met en œuvre des connaissances.

La classe de situations réflexives par rapport à la situation de référence est nommée ***situation d'apprentissage*** ; le sujet y établit des rapports non plus avec le milieu objectif, mais avec une ***intériorisation*** des rapports qu'un sujet agissant (lui ou un autre) a avec le milieu objectif. C'est ce qu'on nomme ***milieu d'apprentissage***. » (p40)

Nous conserverons cet aspect simplifié de la notion pour la suite de notre étude.

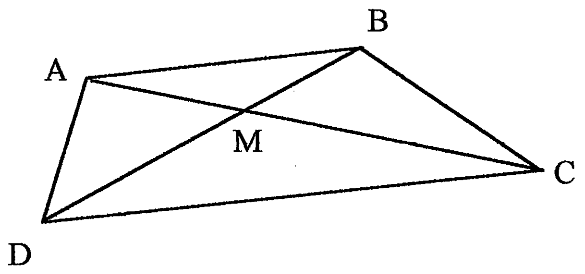
Dans le cadre de l'analyse d'une situation didactique, dans la mesure où la recherche portera sur les rapports de l'élève avec le milieu, nous entendrons « le milieu » au sens de « milieu adidactique » que l'on retrouve également dénommé « milieu d'apprentissage » défini dans la structure d'oignon.

Mais retenons que d'un point de vue général, le milieu sera à la fois partie et tout. Il est une métaphore globale, un modèle, et en même temps une réalité didactique. C'est à cette réalité délimitée au milieu d'apprentissage, que nous nous intéresserons par la suite.

Poursuivons l'exposé des outils théoriques qui serviront pour nos analyses, avec la présentation des trois problématiques mises en évidence par S&B leur permettant de clarifier une partie des rapports d'un sujet avec l'espace sensible et l'espace géométrique.

II. Les différentes problématiques permettant de caractériser un certain rapport à l'espace et à la géométrie

Nous présenterons en premier les trois problématiques définies par S&B, pour donner ensuite des éléments de leur articulation. Dans chaque paragraphe sera cité l'exemple utilisé par S&B comme illustration, relatif aux diverses solutions proposées au sujet du concours CERPE[8] suivant : « (ABCD) est un trapèze quelconque, les diagonales (AC) et (BD), se coupent en M. Comparer les aires des triangles (AMD) et (BMC). Justifier votre réponse. » L'énoncé est accompagné d'une figure du type suivant :



1. Présentation des problématiques

a) La problématique pratique

Voici ce qu'en disent S&B[9] en reprenant initialement une citation de Bourdieu :

> « "La pratique se déroule dans le temps, et elle en a ... l'irréversibilité ... Elle ne connaît que les cas particuliers et les détails de l'intérêt pratique ou de la curiosité anecdotique... Elle exclut tout intérêt formel. Le retour réflexif sur l'action elle-même, lorsqu'il survient (c'est-à-dire presque toujours en cas d'échec des automatismes), reste subordonné à la poursuite du résultat et à la recherche (qui ne se perçoit pas nécessairement comme telle) de la maximisation du rendement de l'effort dépensé." [10]
>
> **Se placer dans une problématique pratique, c'est donc essentiellement contrôler ses rapports spatiaux de manière empirique et contingente.** Les situations correspondantes sont des situations d'action et de communication, résolues par les moyens les plus économiques en conceptualisation. L'action, dont le résultat est immédiatement visible et évalué de façon continue, constitue le principal régulateur de la mise au point de la solution des situations correspondantes : si la solution n'est pas satisfaisante, le sujet va la modifier par ajustement jusqu'à ce qu'elle le devienne.
>
> Nous désignons par pratiques les rapports spatiaux et les connaissances mis en œuvre dans une problématique pratique. » (p50)

[8] Concours Externe de Recrutement des Professeurs des Ecoles.

[9] Dans les citations des trois paragraphes, en gras c'est nous qui soulignons.

[10] BOURDIEU P. (1980) *Le sens pratique,* Ed. Les éditions de minuit

Se placer dans une problématique pratique, pour la résolution de l'exercice (comparaison des aires des deux triangles) consisterait à prendre des gabarits des deux triangles proposés sur la figure, et de faire des découpages et des recollements (sans trou ni chevauchement) pour comparer les aires par superposition.
Le caractère pratique de cette procédure s'appuie à la fois :

- sur la prise en compte des triangles de la figure ; il n'y a aucun souci de généralité dans cette procédure, ni la volonté de travailler sur des triangles quelconques ;
- sur le caractère effectif des actions exercées sur ces objets ;
- sur la validation empirique de la réponse apportée.

b) Problématique de modélisation

> « **L'espace de référence dont il est question est bien l'espace sensible**, comme dans la problématique pratique. Un autre point commun avec la problématique pratique, est que **la solution doit pouvoir être validée dans l'espace sensible.**
> Par contre [...] **la solution d'un problème par modélisation est construite complètement dans le système symbolique du modèle selon la dynamique de ce système.**
> Cette démarche établit un certain rapport entre deux mondes : le monde sensible et un modèle, système symbolique doté de règles internes qui permettent de constituer à partir des objets initiaux et de relations initiales de nouveaux objets et de nouvelles relations valides. Un certain nombre de relations dans le modèle sont signifiantes de relations dans l'espace et leur permettent de représenter le problème dans l'espace par un problème dans le modèle. A partir de ces relations, et du système de règles de production internes au modèle, la solution est construite dans le modèle.
> L'interprétation dans l'espace sensible de la solution construite dans le modèle permet la validation pragmatique de l'ensemble de la démarche. » (p50)

Pour l'exemple de la comparaison des aires des triangles, la solution associée à cette problématique est celle consistant à prendre des mesures sur la figure donnée et à utiliser comme modèle les formules d'aires des triangles pour effectuer les calculs.
Cette problématique est caractérisée par la prise en compte du caractère spatial des objets ; par une résolution faisant appel à un modèle (des savoirs géométriques) ; et par une validation particularisée au problème, sans souci de généralité.

c) Problématique géométrique

> « **Se placer dans une problématique géométrique c'est entrer dans un rapport entre mathématiciens établi sur la base de déclarations concernant un espace conceptualisé et**

contrôlées par la consistance (au sens de non-contradiction) de l'ensemble de ce qui est déclaré sur lui. [...] Nous qualifierons de géométriques les connaissances relatives à l'espace et les rapports spatiaux qui sont mis en œuvre par les élèves ou les enseignants dans une problématique géométrique déterminée par une situation didactique. » (p49)

Reprenant à nouveau l'exemple étudié, la solution associée à cette problématique consiste à prendre en compte les objets géométriques et non la figure, et à élaborer une suite d'enchaînements logiques de propositions mathématiques permettant en bout de raisonnement de déduire la réponse ; en utilisant des formules d'aires, et en restant dans le cadre algébrique ; ou bien en considérant la conservation de l'aire d'un triangle par déplacement du sommet sur une parallèle à la base, comme une connaissance établie de géométrie, et en utilisant uniquement des propriétés de géométrie relatives aux aires. Dans le cas d'utilisation de formules, les mesures sont des variables, données ou calculées, et non des valeurs numériques particulières.

Cette problématique est caractérisée par une prise en compte des objets dans leur valeur de généralité (les objets géométriques), la résolution s'effectue dans le cadre du modèle mathématique, et la validation provient de la qualité des enchaînements de la démonstration. La validation est interne à la résolution. La figure sert de support au discours.

Les trois problématiques se caractérisent donc pour S&B par un espace de référence, un espace de résolution, et un espace de validation, pour un problème donné.

- Pour la problématique pratique, tous ces espaces sont l'espace sensible.
- Pour la problématique de modélisation, l'espace de référence est l'espace sensible, on s'intéresse à un problème spatial. L'espace de résolution est l'espace d'un modèle, géométrique. L'espace de validation peut être considéré comme double : une première validation interne au modèle utilisé, et une validation pragmatique dans l'espace sensible par la mise en œuvre spatiale de la solution trouvée dans le modèle.
- Pour la problématique géométrique, les trois espaces sont l'espace géométrique. On considère un problème de géométrie, que l'on résout géométriquement, et que l'on valide sur la base d'arguments et de déductions propres à la géométrie.

Cette distinction est une première ébauche permettant de clarifier dans un premier temps le type de rapport qu'un sujet établit face à un problème donné, rapport vu sous l'angle de la nature des objets du problème, la nature des outils ou actions de résolution, et la nature de la validation d'une réponse.

Nous allons affiner cette première distinction dans le paragraphe 3, en regardant de plus près l'articulation du spatial et du géométrique dans le travail de l'expert par rapport aux deux dernières problématiques. Mais avant cela, reprenons quelques remarques de S&B sur la prégnance de la problématique pratique.

2. Remarques sur la prégnance de la problématique pratique

En premier lieu, c'est une attitude naturelle, contrairement aux deux autres problématiques qui sont des attitudes « réfléchies » issues d'apprentissages.
En second lieu dans le cadre scolaire, le contrat didactique instauré par le maître a une influence considérable sur le positionnement du sujet par rapport à l'une de ces problématiques.
Développons ces points.

a) Une attitude naturelle

Rappelons déjà cette évidence, que les premiers apprentissages de l'espace par le jeune enfant se font dans le cadre d'une problématique pratique. Et d'une manière générale « c'est la clé de la résolution par l'action des situations effectives. »[11]

Dans le cadre des pratiques courantes, sociales et non didactiques, le sujet entre le plus souvent dans une problématique pratique pour résoudre un problème. Et s'il utilise des modèles, ce ne sont pas nécessairement des modèles géométriques.
D'autre part la problématique pratique peut être aussi efficace et moins coûteuse que le recours à un modèle mathématique pour certaines situations. Sur les espaces du quotidien nous avons le plus souvent un contrôle suffisant des actions sur le milieu pour éviter de faire appel à un modèle.
De plus, culturellement, l'étude de la géométrie a toujours rejeté la prise en compte de la réalité, donc nous avons peu d'expérience d'une réflexion et d'une prise en charge de cette réalité dans la construction ou l'utilisation des modèles. En particulier le rapport aux pratiques des mesures reste très flou, justement parce qu'on n'est plus dans une géométrie comme discours consistant sur l'espace.

La question qui se pose pour les enseignants est alors, pour dire court : quel milieu le maître doit-il construire pour permettre aux élèves de sortir d'une problématique pratique pour entrer dans une problématique de modélisation ou géométrique ?

---

[11] S&B p146.

b) Une histoire de contrat : exemple du triangle aplati

S&B font une étude détaillée du problème du triangle aplati proposé par Arsac[12], et précisent ainsi la nécessaire prise en compte de cet outil (distinction des problématiques) pour une analyse des situations d'enseignement.

Un maître propose à ses élèves de construire des triangles dont les longueurs des trois côtés sont données. Il demande aux élèves d'effectuer plusieurs constructions correspondant à une variation des longueurs des côtés. Trois cas se présentent :
La somme des longueurs des deux plus petits côtés est strictement supérieure à la longueur du troisième côté ; ou bien elle lui est strictement inférieure ; ou bien elle lui est égale.
Dans ce dernier cas, au sein de la classe, il y a contradiction entre les différentes conclusions issues des tracés (un triangle, pas de triangle, un segment) et la connaissance géométrique de l'(in)égalité triangulaire. Les premières s'appuient sur des connaissances pragmatiques à caractère spatial, la seconde sur une propriété géométrique.

Dans le contexte proposé aux élèves les deux attitudes sont justifiées.
L'espace de référence est l'espace sensible. L'implicite de la possibilité de conclure à partir des tracés est le fondement de l'activité de l'élève pour les cas d'inégalité stricte. Le contrat est alors la résolution pratique d'un problème de construction. Celle-ci est justifiée puisqu'on s'appuie sur des tracés que le maître demande d'effectuer et parce que le contrôle se fait de façon empirique. Comme il n'y a pas de rupture dans la situation, dans le contrat de travail, il n'y a aucune raison pour qu'il y ait un changement dans la démarche des élèves pour le cas d'égalité des longueurs.
Cette situation place de fait en contradiction la problématique pratique et la problématique géométrique. Telle qu'est proposée la situation par le maître, la déclaration de la propriété géométrique ne peut se faire qu'avec un caractère d'arbitraire fort, puisqu'*en opposition avec l'expérience empirique des élèves*. Or celle-ci est fondée sur le contrat initial instauré par le maître.

D'une façon plus générale, c'est le contrat didactique qui détermine le sens que l'élève donne au travail fait en classe. C'est au niveau du contrat que la différence entre problématique pratique et problématique géométrique doit intervenir.

> « Dans le contrat géométrique, l'élève doit comprendre que le rapport à l'espace n'est plus le même, qu'il n'est qu'un moyen d'entrer en rapport avec un autre milieu, celui formé par

---

[12] ARSAC et coll. (1992) *Initiation au raisonnement déductif au collège*, Presses Universitaires de Lyon. Etude par S&B p59.

l'ensemble des personnes qui à propos d'un « fait » spatial, s'interrogent sur son aspect contingent ou nécessaire, et qui pour répondre à cette question, ont recours à une méthodologie tout à fait particulière, spécifique des mathématiques. » (p133)

Ajoutons une phrase de G. Brousseau qui nous semble être fondamentale pour l'analyse précédente et celles qui suivront :

« Ce qui est dévolu est bien un rapport à un milieu »[13]

A nouveau la question pour les enseignants est la suivante : quel milieu le maître peut-il construire pour amener les élèves à changer de point de vue sur le spatial ?

Pour tenter de répondre à ces questions et proposer des pistes de recherche, nous allons étudier plus précisément où se fait et en quoi consiste l'articulation du spatial et du géométrique, dans le travail de l'expert, relativement aux deux problématiques de modélisation et géométrique. Ensuite nous en déduirons des conséquences sur certaines contraintes à prendre en compte dans l'enseignement de la géométrie à l'école.

3. Articulation du spatial et du géométrique dans le travail de l'expert

a) Relativement à la problématique de modélisation

Confronté à un problème spatial, l'expert le modélise, c'est à dire le transforme en problème de géométrie, utilise ses connaissances géométriques pour résoudre le problème modélisé, met en œuvre de façon pratique la solution trouvée dans le modèle, pour effectuer une résolution pragmatique du problème posé dans l'environnement spatial.
L'articulation spatio-géométrique se caractérise dans ce cas par l'intervention du géométrique pour la résolution d'un problème spatial.

b) Relativement à la problématique géométrique

Considérant un problème de géométrie l'expert raisonne sur des objets géométriques, résout le problème dans le cadre géométrique, argumente, démontre, valide dans l'espace géométrique ...

[13] Brousseau (1988), p312.

Cependant il serait erroné de considérer que l'aspect théorique est l'unique aspect du travail de l'expert. Il nous faut considérer le cas où **l'espace sert d'heuristique au positionnement de l'expert dans la problématique géométrique**.

D'une part, *l'expert utilise souvent des traductions schématiques du problème, des dessins, des images de géométrie.* La lecture sur le dessin de certaines propriétés, la transformation des dessins[14], l'heuristique des dessins... fait intervenir le spatial et l'espace sensible, de manière statique ou dynamique, et entraîne avec elle toute la problématique phénoménologique « dessin, figure, objet géométrique » qu'il faut maîtriser ... Les représentations mentales de l'expert, les idées et actions qu'il peut avoir pour utiliser telle ou telle propriété, ou établir tel ou tel enchaînement de raisonnement, s'appuie d'une manière ou d'une autre sur des expériences préalables auxquelles il peut faire référence *mentalement.*
L'intervention du spatial dans la problématique géométrique se caractérise dans ce cas par l'usage statique ou dynamique de dessins pour résoudre le problème.

D'autre part, *l'expert peut également utiliser une expérience spatiale effective ou évoquée pour avancer dans la résolution du problème.* Il peut construire des équivalents spatiaux aux objets géométriques qu'il veut considérer, et travailler avec ces objets spatiaux ; exercer des actions sur ou avec ces objets, qui lui permettent d'envisager un résultat ou de l'établir.
Les actions sont des actions effectives, qui font intervenir mouvement et déplacement des objets dans l'espace sensible. Il s'agit en général de problèmes posés dans le cadre de la géométrie dans l'espace.
L'expérimentation spatiale peut n'être qu'un passage pour l'expert pour mieux se saisir mentalement des objets de son problème, se donner des idées, tâtonner, faire des essais d'actions effectives, qui pourront avoir leurs équivalents en actions géométriques ; et ainsi s'aider à bâtir le raisonnement argumentatif de type géométrique, qui permettra de proposer une résolution du problème dans le cadre géométrique avec une validation théorique établie sur la base de déclarations. L'espace de référence est alors l'espace géométrique, l'espace de résolution est l'espace sensible, et l'espace de validation est géométrique.
L'expérimentation spatiale peut être également l'aboutissement de la résolution *et* de la validation, dans certaines approches de la géométrie qu'on a pu appeler « géométrie expérimentale ». C'est par exemple Clairaut justifiant l'existence d'une perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné en référence au mouvement rotatif d'une demi-droite mobile fixée au point considéré. L'espace de référence est alors l'espace géométrique, l'espace de résolution est l'espace sensible, et l'espace de validation est également l'espace sensible.

---

[14] Cf. les différentes appréhensions d'une figure selon R. Duval (1994)

Que l'espace de validation soit sensible ou géométrique, **l'intervention du spatial dans la problématique géométrique se caractérise dans les deux cas par l'usage d'expériences spatiales pour la résolution du problème de géométrie.**

4. Conclusions et questions pour l'enseignement de la géométrie à l'école

L'expert dispose des connaissances de base qui permettent de résoudre les problèmes. Les élèves a priori non. Dans quelles situations s'apprennent les connaissances élémentaires de géométrie utiles à la résolution des problèmes ?

L'expert dispose d'un bagage d'expériences spatiales intériorisées lui permettant de se dégager du spatial pour y faire appel mentalement ou en maîtriser son usage. Et il peut se passer des expériences spatiales effectives pour faire appel à des expériences spatiales évoquées. Comment penser une dialectique entre expériences effectives et expériences évoquées pour la constitution de ce bagage d'expériences nécessaire aux élèves ?

L'expert joue très souvent sur l'articulation du spatial et du géométrique, et maîtrise les règles de ce jeu. L'élève a priori, non.
L'expert expérimente dans l'espace en gardant le contrôle théorique dans le cadre géométrique. Il a un pied dans le modèle et un pied dans l'espace à modéliser. La manipulation lui permet de trouver des arguments géométriques *à condition* justement qu'il fasse la manipulation en pensant *en même temps* dans le cadre géométrique.
S'il utilise des figures, il est prévenu de la distinction à faire entre propriétés visuelles et propriétés géométriques.
S'il effectue une expérimentation et observe un phénomène, il tentera de le vérifier théoriquement, de le reconstruire théoriquement, il est prudent par rapport à ce qu'il déduit, il s'assure d'une certaine cohérence, un certain bon sens par rapport à son domaine de travail ...
N'est-il pas nécessaire de faire dévolution aux élèves des problèmes soulevés dans l'articulation du spatial et du géométrique pour qu'ils en maîtrisent les règles du jeu.

Poursuivons les questions pour la recherche en regardant plus précisément un type de situation, qui fera l'objet de notre quatrième partie, les situations de modélisation, où nous allons retrouver les questions d'articulation entre les différentes problématiques pratique, géométrique et de modélisation.

III. Les situations de modélisation

Dans un premier paragraphe nous étudierons un exemple complémentaire à ceux développés par S&B, pour dans un second temps dégager les questions de recherche qui se posent pour l'étude des situations de modélisation. Ensuite nous reviendrons à la situation fondamentale de la géométrie comme modèle de l'espace, telle que G. Brousseau en fait la présentation, pour introduire l'étude expérimentale que nous avons menée sur cette voie.

1. Etude d'un exemple : la chasse au trésor[15]

a) Problème et analyse succincte de sa résolution

> Les élèves doivent retrouver deux trésors que le maître a enfouis dans le terrain qui se trouve à côté de l'école. Ce terrain ne contient que trois arbres un chêne, un saule et un platane ;
> Voici les indications fournies sur l'emplacement (existant) des trésors :
> le premier trésor se trouve à 15 mètres du platane et à 9 mètres du chêne ;
> le second trésor se trouve à 6 mètres du plus petit côté du terrain et il est situé à égale distance du chêne et du saule.

Les notions mathématiques sous-jacentes sont clairement identifiables :

- pour le premier trésor, il s'agit de la notion de *cercle comme modèle d'un ensemble de positions dans l'espace situées à égale distance d'un même endroit.* En reprenant avec un vocabulaire non plus spatial mais géométrique cela peut se formuler ainsi : le cercle comme ensemble de points équidistants d'un point donné.
- pour le second trésor, l'idée de *parallèle comme modèle d'un ensemble de positions dans l'espace situées à même distance d'une ligne droite* (la parallèle à une droite donnée comme ensemble de points équidistants à cette droite) ; la notion de *médiatrice comme modèle d'un ensemble de positions dans l'espace situées à égale distance de deux positions données* (la médiatrice comme ensemble de points équidistants à deux points donnés).

Le problème spatial (évoqué pour le lecteur et non effectif) peut donc se modéliser en termes de points, de lignes, en établissant des équivalents entre les propriétés spatiales de distances et les propriétés géométriques de distances.
A partir de ces aspects géométriques, la résolution se fait dans le modèle ; on détermine la position du premier trésor, située à une des deux intersections de deux cercles ; on établit celle

[15] La situation est citée par R. Charnay dans *Pourquoi faire des mathématiques à l'école*, Ed. ESF. Pratiques en enjeux pédagogiques, 1996 (les données prises ici sont arbitraires)

du second trésor comme intersection d'une parallèle (à une droite) et d'une médiatrice (à un segment).
La résolution globale n'est pas terminée. Il faut maintenant revenir au spatial, et *déterminer spatialement ces positions*. Cela va nécessiter l'usage d'instruments ou d'outils appropriés ; la construction de lignes à grande échelle ; la prise en compte de l'épaisseur des arbres, du rebord de la route, ... Car n'oublions pas que « l'interprétation dans l'espace sensible de la solution construite dans le modèle permet la validation pragmatique de l'ensemble de la démarche. »
Pour *la mise en pratique de la solution trouvée dans le modèle* il va falloir tenir compte des approximations spatiales, non prises en compte dans le modèle, et savoir que *c'est une région de positions possibles*, et non des positions que l'on obtiendra comme réponse spatiale.

Voici clairement un exemple de **démarche par modélisation**. Nous sommes entrée dans une problématique de modélisation qui reprend bien les différentes étapes décrites par S&B.
Il se dégage de la résolution (évoquée) plusieurs types "connaissances" indispensables à la maîtrise de cette démarche :

- **Etant donné le problème spatial, savoir que l'on peut le modéliser par des outils géométriques et savoir que le retour du modèle au spatial implique la prise en compte d'un intervalle d'incertitude.**

- **Faire intervenir des connaissances que l'on a déjà, et savoir comment les faire intervenir, c'est à dire établir déjà un lien entre ces outils géométriques et la pertinence de leur utilisation dans ce cas.**
  (Ce dernier point renvoie à la multiplicité des conceptions[16] d'une notion géométrique, et au fait de repérer que telle situation spatiale se rattache à l'une d'entre elles.)

Pour résumer grossièrement : nous savons ce qu'est la modélisation, nous avons des connaissances et nous savons les faire fonctionner, géométriquement et spatialement.
Voilà donc pour une résolution par l'expert.

Mais qu'en est-il pour une résolution par des élèves, dans le cas d'une situation de classe, dont les objectifs seraient précisément ces aspects ?
En effet cette situation pourrait être à la fois une situation d'apprentissage de connaissances géométriques (cercle, médiatrice, parallèle, selon certaines conceptions) et à la fois une

[16] au sens de M. Artigue. (défini dans l'article *Conceptions du cercle chez les enfants de l'école élémentaire,* RDM vol 3.1.)

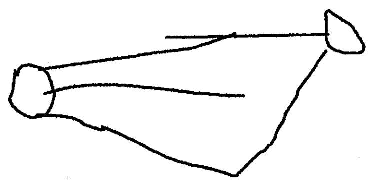
situation d'apprentissage d'un certain rapport à la géométrie, apprentissage d'une démarche de modélisation.

b) Une étude rapide

Revenons à la situation proposée aux élèves qui vont aller sur le terrain dans un premier temps pour résoudre le problème. Il est fort probable qu'ils entrent au départ dans une problématique pratique, par tâtonnements, successifs, soumis au hasard, ou vaguement dirigés déjà par leur intuition. Rappelons que la problématique pratique se caractérise par « un contrôle de ses rapports à l'espace de manière empirique et contingente. »
Cette première phase est importante, elle permet aux élèves d'entrer dans le problème (au maître de faire la dévolution du problème) et d'engager une première recherche.

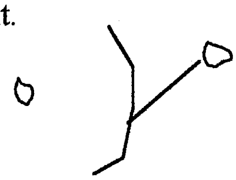
Supposons que les élèves produisent les transcriptions suivantes, suite à une demande de formulation de leurs procédures :

« On a fait plusieurs essais. C'est sur notre dessin. »



« On a accroché de la ficelle au platane, on a tendu la ficelle à quinze mètres, et Nathalie s'est mise au bout. Pareil au chêne mais c'est Philippe qui s'est mis au bout et la ficelle faisait 9 mètres. Ils sont allés l'un à côté de l'autre en tendant le plus possible les ficelles. »

« On a mis plein de choses par terre pour des endroits à quinze mètres du platane. Et on a tendu les 9 mètres de ficelle du chêne pour voir où ça arrivait.
Comme sur le dessin. »



Nous sentons les difficultés que va avoir le maître à rendre explicites les modèles implicites mis en jeu par les élèves (repérés par un observateur averti, mais rarement par les élèves eux-mêmes). Il est presque certain par exemple qu'aucun élève n'aura étudié des positions *tout autour* de l'arbre, mais *quelques* positions dans une région déterminée intuitivement comme plausible …

Un autre moyen que la formulation pour *concevoir*, c'est d'*anticiper*. De fait, on ne peut plus avoir recours à une problématique pratique, et cela constitue un outil pour le maître.
La situation peut être à nouveau proposée aux élèves mais dans la classe, où ils devront prévoir les actions qui seront à effectuer sur le terrain, avec un changement nécessaire dans le contrat didactique, pour sortir de la problématique pratique. Car une consigne de prévision *des actions qui seront réalisées sur le terrain*, est une consigne induisant l'entrée dans une problématique pratique. Une consigne portant directement sur la modélisation, du type « rechercher des méthodes géométriques qui vont nous permettre de résoudre le problème sur le terrain » est beaucoup plus claire par rapport au contrat didactique d'entrée dans une problématique de modélisation.
D'autre part des images vont être nécessaires pour mémoriser le problème, le représenter, voire le résoudre. L'usage de ces représentations peut induire une compréhension plus grande du procédé de modélisation.

Nous n'allons pas poursuivre ce travail sur situation virtuelle, il sera repris et approfondi dans la quatrième partie consacrée à l'étude d'une autre situation de modélisation du même type. Il nous paraissait être un moyen d'entrer en matière, pour poser maintenant quelques questions de recherche.

2. Des questions de recherche

Une hypothèse de travail :
Les concepts de géométrie sont utiles pour résoudre des problèmes spatiaux.

Cela ne fait pas avancer le travail sur l'élaboration de ces concepts dans des situations de modélisation, mais au moins, et c'est en cela qu'il est nécessaire de le rappeler, cela permet de se situer parmi un ensemble de conceptions de ce qu'est la géométrie. Et de ce que « faire de la géométrie à l'école » pourrait signifier.

Cette hypothèse étant réaffirmée, avançons dans les questions qui nous sont posées par l'étude des situations de modélisation.

Quel milieu construire pour permettre aux élèves d'entrer dans une problématique de modélisation ?

Quelles sont les composantes du milieu objectif avec lesquelles l'élève interagit ? Et quelles sont les variables pertinentes qui modifient les interactions de l'élève avec le milieu ?

Comment s'articulent, et comment articule-t-on, les connaissances spatiales spontanément développées par les élèves dans une problématique pratique, et les connaissances géométriques sous-jacentes à une modélisation ?

Ce sont ces questions que nous étudierons dans la quatrième partie, sur l'étude de la situation « Terrain et tige », descendante directe de la situation des drapeaux[17] proposée par G. Brousseau comme une situation fondamentale de la géométrie comme modèle de l'espace. Nous allons donc revenir sur ce concept de situation fondamentale, et son utilisation pour la géométrie comme modèle de l'espace.

3. Retour à la théorie des situations avec les situations fondamentales

Rappelons dans un premier temps, d'un point de vue général, ce qui est entendu par « situation fondamentale ».

a) Situation fondamentale, dans le cadre de la théorie des situations

La notion de situation fondamentale a été instaurée dans les années 80 par G. Brousseau, la première fois pour l'étude de « la course à 20 », dans le cadre de la mise en place de la théorie des situations. Il s'agissait de « construire un modèle d'apprentissage pour la course à 20, comportant des paramètres tels qu'il soit possible, en modifiant leur valeur, d'ajuster à volonté la courbe des apprentissages. »[18]
M-J. Perrin-Glorian précise :

> **« C'est un paradigme de recherche. »**
> **« Une métaphore qui permet en jouant sur les variables d'engendrer plusieurs situations ».**

Lors de son intervention dans l'équipe DIDIREM en janvier 1999[19], G. Brousseau dit :

---

[17] Exposée dans le paragraphe 3.c suivant.

[18] G. Brousseau cité par M-J. Perrin-Glorian dans PERRIN-GLORIAN M-J. (1994) *Théories des situations didactiques : naissance, développement, perspectives,* Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France, collectif, Ed. La pensée sauvage.

[19] Annexe 1.

> « Nous appelons situation fondamentale, une situation qui engendre par le jeu de ses variables et de ses variantes l'ensemble s des situations d'un concept (ou d'une conception). C'est en quelque sorte le paradigme de s, le prototype le plus général. Elle est caractéristique d'une connaissance et calculée d'après elle. »

Nous nous permettons de clarifier cette position en repérant parmi ce genre de situations :
- celles qui s'intéressent spécifiquement à un concept mathématique (ou une de ses conceptions) ;
- celles qui s'intéressent à des connaissances non formalisées en géométrie mais utiles pour la géométrie (par exemple tout ce qui concerne l'usage de représentations planes d'espaces ou d'objets de l'espace) ;
- celles qui s'intéressent à des connaissances liées au rapport entretenu avec l'espace (par exemple la situation des médiatrices[20] et la situation des drapeaux).

Par exemple pour le second cas, S&B repèrent « les situations fondamentales de la représentation de l'espace environnant par un plan ou une carte » :

> « Une analyse un peu systématique des pratiques de référence montre que l'on peut rassembler en trois catégories de situations fondamentales :
> - celles où les plans ou cartes sont, pour le sujet, des supports à l'exploration et à la mise en mémoire des connaissances concernant un espace nouveau. [...]
> - celles où les cartes ou plans constituent, pour une personne qui doit se déplacer dans un espace, inconnu pour elle, un des moyens les plus efficaces pour saisir les informations nécessaires à la détermination de son itinéraire. [...]
> - celles où les cartes et plans sont nécessaires pour communiquer ou déterminer une localisation précise où une action technique d'aménagement de l'espace doit être entreprise. [...] » (p325)

Citons comme autre exemple pour le second cas, développé dans leur travail, une situation fondamentale de l'énumération[21] où il s'agit d'apprendre pour énumérer, des moyens pour garder un contrôle continu du déroulement de l'activité d'énumération.
Etudions maintenant celles qui motivent notre recherche.

<u>b) Situation fondamentale de la géométrie comme modèle de l'espace</u>

[20] Exposée dans S&B paragraphe B-7. III, et utilisée dans notre travail au chapitre 2A.II.3.a.

[21] S&B chapitre C-5

Nous avons passé sous silence dans les citations données dans le paragraphe précédent, le fait qu'elles expriment le lien entre plusieurs situations et *un* concept ou *une* conception d'une notion géométrique. Or nous faisons, et S&B avant nous, une extrapolation de l'objectif d'apprentissage, non plus lié à un concept, mais à un certain rapport à l'espace et à la géométrie.

Etant donnée une tâche (fondamentale), elle génère un ensemble de situations définies par l'environnement, les objets, les actions, ... et d'autres variables, qui peuvent faire appel à un ensemble de concepts.

L'idée fédératrice de ces concepts peut être un modèle géométrique, elle peut être, et c'est notre hypothèse, **un rapport à l'espace et à la géométrie. C'est en ce sens que nous parlerons d'une situation fondamentale de la géométrie comme modèle de l'espace.**

La situation fondamentale de la géométrie comme modèle de l'espace est une métaphore pour dire *l'ensemble* des problèmes spatiaux, pour lesquels la géométrie est un bon outil de résolution.

Il s'agit de déterminer des problèmes pour lesquels les concepts ou connaissances visés sont des outils nécessaires (théoriquement) à leur résolution.

Il existe un certain nombre de problèmes spatiaux que la géométrie permet de modéliser en vue de leur résolution. Par exemple (je reprends le descriptif proposé par S&B) :

- comment conserver la forme des figures dans la reproduction ?
- comment se déplacer sans se perdre dans un espace inconnu ?
- comment évaluer une distance entre deux points si on ne peut pas faire de mesure directe ?
- comment couper au sol les poutres pour qu'elles s'assemblent convenablement sur le toit ?
- comment connaître la position des objets par rapport à moi, si je me déplace ?

La situation des drapeaux[22] proposée par G. Brousseau est un cas particulier du troisième type de problème.

c) La situation des drapeaux et autres modalités

La situation des drapeaux constitue en soi une « **modalité** de la situation fondamentale de la géométrie modèle de l'espace. »[23]

[22] Situation décrite dans Brousseau (1987), et clarifiée par S&B au II. du chapitre B-7

[23] S&B p130, c'est nous qui soulignons, le terme paraissant très bien adapté.

> Deux drapeaux sont plantés sur les bords de deux allées. Il s'agit de déterminer la distance entre les deux drapeaux, sans pouvoir se rendre sur la pelouse (terrain situé entre les deux allées).

S&B mentionnent les types de solutions que l'on peut envisager (usage d'un plan ou usage de transformations) et en indiquent les connaissances sous-jacentes. Ils entrent un peu plus dans le détail de l'analyse pour la situation « Terrain de tennis »[24], pour laquelle la tâche est la même que pour les drapeaux (déterminer une distance indirectement) mais l'environnement est constitué d'un tuyau rectiligne situé sur deux côtés consécutifs (à l'intérieur) d'un terrain de tennis, dans lequel on ne peut pas entrer bien sûr.

Voici ce qu'ils disent à propos de « Terrain de tennis », situation ayant servi comme point de départ à notre étude, pour la compréhension d'une structuration du milieu[25].

> « Les deux situations qui fondent la modélisation :
> - la situation de référence : interaction spatiale effective et adidactique
> - la situation d'apprentissage : situation de modélisation
>
> La modélisation d'une situation particulière (contingente) ne se justifie que par l'exigence d'une réponse convenable à une classe de situations particulières, effectivement mises en place ou intériorisées.
> La situation de référence doit donc donner naissance par l'effet de variables didactiques convenables, à une classe de situations modélisables par la même notion géométrique. [...]
> Il s'agit donc d'organiser une situation d'apprentissage où, par évocation de la situation de référence, pourra être dégagée une loi (de type loi physique) de l'espace qui s'appuie sans les contredire sur les connaissances préalablement étudiées. [...] Ceci va être obtenu en faisant varier la valeur d'une variable didactique de la situation de référence, ici la forme du terrain. [...]
> Dans ces situations, où les rapports effectifs et intériorisés auront été convenablement articulés sous l'action de variables didactiques d'une situation fondamentale, les élèves auront acquis une pratique modélisante des rapports spatiaux, source de *connaissances* et de *questionnements* sur leur environnement spatial. » (p70-71)

Nous partageons entièrement cette dernière position, bien qu'elle soit une position a priori, puisque aucune étude approfondie n'a pris en charge l'analyse didactique détaillée de ce genre de situations. C'est ce que nous nous proposons de faire dans les chapitres de la quatrième

---

[24] B-4, p71.

[25] Au sens de Margolinas.

partie. Pour la situation qui y sera exposée pour tenter de répondre aux questions de recherche, la tâche est identique à celle « des drapeaux » et du « terrain de tennis » : déterminer une mesure sans pouvoir directement effectuer cette mesure, ou « mesurer l'inaccessible ».

> Une tige rectiligne est située à l'intérieur d'un terrain polygonal, ses extrémités sont sur deux côtés consécutifs du terrain. Il s'agit de déterminer une mesure de la longueur de la tige, sans entrer dans le terrain, ni un individu ni des objets, et sans passer quoi que ce soit au-dessus du terrain.

La tâche de la situation de base évoluera très vite vers *la recherche de méthodes permettant de* déterminer une mesure de la tige.
L'expérimentation articule des travaux pour des terrains situés dans la cour de récréation, et des travaux en classe où les terrains sont représentés sur feuille de papier.
Cette situation sera appelée dans le reste de notre travail situation « Terrain et tige ».

Tout comme la situation des drapeaux ou du terrain de tennis, cette situation est à envisager comme *une modalité* d'une situation fondamentale de la géométrie comme modèle de l'espace. *C'est l'étude de cette modalité qui a guidé l'expérimentation.*
Il ne s'agit aucunement d'un processus d'apprentissage ou d'enseignement. Même si ce que nous visons à long terme est la possibilité d'en concevoir. Nous ne raisonnerons pas en terme d'ingénierie didactique.
L'étude a priori de la situation « Terrain et tige » fournit des éventualités de dispositifs et d'objectifs. Ne voulant en privilégier aucun, les séances ont été conçues pour permettre les observations relatives aux questions qui nous préoccupent.
C'est bien la situation fondamentale qui nous intéresse et non la situation didactique.
Rappelons une remarque de G. Brousseau :

> « Une situation fondamentale n'est pas nécessairement une bonne situation didactique. Pour qu'une situation permette aux élèves dans des conditions raisonnables de produire de façon originale la réponse posée et de développer des connaissances nécessaires, il faut bien plus de propriétés que pour être une situation fondamentale. Et il faut bien distinguer les deux. Si je prends comme instrument didactique une situation fondamentale, il se peut que je sois obligé de donner la réponse, de l'expliquer en disant voilà le problème posé et voilà comment on le résout. »[26]

---

[26] Intervention au séminaire DIDIREM, janvier 1999 (annexe1)

Nous ne nous plaçons pas dans cette dernière éventualité mais nous tenions à bien rappeler en effet qu'il existe une distinction entre situation fondamentale et situation didactique.

Le paragraphe suivant est consacré à une précision concernant les notions de micro méso et macro espace, notions très souvent utilisées depuis quelques années dans les articles de didactique concernant la géométrie. Il nous a paru important de les clarifier, pour en extraire les outils d'analyse qu'elles permettent.

IV. Remarques sur la distinction entre micro méso et macro espace

1. Distinction par Galvez et Brousseau

Ces termes de micro, méso, et macro espace ont été définis et utilisés par G. Galvez et G. Brousseau pour cadrer un travail de thèse[27] afin de décrire des classes de situations relatives à des activités spatiales de déplacements. G. Galvez s'est intéressée aux problèmes posés par les déplacements et le repérage dans l'espace urbain de Mexico pour les enfants de l'école. Reprenons la traduction proposée par S&B[28] d'un extrait de cette thèse, pour dégager les caractéristiques proposées :

Le micro espace

> « Le micro espace est le secteur de l'espace proche du sujet, et qui contient des objets accessibles à la vision comme à la manipulation. ... La perception de l'objet peut se caractériser comme exhaustive... On peut considérer que le micro espace est l'espace de l'objet en face duquel se situe le sujet, mais du dehors. »
> S&B ajoutent :
> « La vue, dans le micro espace, permet un contrôle complet, continu et quasi instantané sur la totalité du domaine spatial avec lequel le sujet interagit. »

Le méso espace

> « Espace des interactions liées à la détermination et à la modification des positions à l'intérieur d'un domaine domestique, comme aux mouvements du sujet à l'intérieur des limites de ce domaine ... Le milieu offre des limitations à la vision simultanée des éléments spatiaux faisant l'objet de l'intérêt des sujets : il y a plusieurs pièces, et ces pièces sont séparées par des murs qui empêchent toute vision simultanée de l'ensemble ... Dans le méso espace, puisque les objets demeurent fixes, ils fonctionnent comme des points de référence pour le sujet ...
> On peut dire que le méso espace est l'espace des déplacements du sujet ... »

Le macro espace

---

[27] GALVEZ G. (1985) *El aprendizage de la orientacion en el espacio urbano : una proposicion para la ensenanza de la geometria en la escuela peimaria*, Thèse, Centre de recherches du IPN, Mexico.

[28] P99-104

« Le macro espace correspond à un secteur de l'espace dont la dimension est telle qu'on peut l'embrasser seulement par l'intermédiaire d'une succession de visions locales, séparées entre elles par les déplacements du sujet sur la surface terrestre.
Dans le macro espace il est impossible pour les sujets d'obtenir une vision globale simultanée du secteur de l'espace avec lequel il est en interaction ...
Les objets restent fixes, c'est le sujet qui se déplace. Pour orienter ses déplacements il doit construire une représentation globale du macro espace reliant ses visions partielles pour récupérer la continuité de l'espace parcouru...
Il est possible de distinguer grosso modo trois types de macro espace : l'urbain, le rural et le maritime ...»

Dans ces trois classes d'espace, deux critères participent simultanément aux définitions :

- **La taille de l'espace**

C'est l'espace proche des objets que l'on peut manipuler, pour le micro ; les maisons, écoles, immeubles, pour le méso ; le quartier, la ville, la mer, le désert, la campagne, pour le macro espace.

- **Le type d'interaction avec l'espace de travail**

Ceci est définit par rapport aux possibilités de contrôle par le sujet des actions sur les objets, ou sur les déplacements d'objets, ou sur les déplacements du sujet : contrôle global pour le micro ; contrôles partiels pour le méso mais le sujet peut avoir une représentation globale de ses actions ou déplacements ; multiples contrôles partiels et absence d'une possibilité de contrôle global pour le macro espace.

2. Utilisations et apports de S&B

a) Le problème rectangle et le problème des bancs[29]

S&B étudient dans un premier temps l'influence de la variable « taille de l'espace » sur les conceptions des élèves du rectangle à partir de deux expériences « Le problème rectangle » et « Le problème des bancs ». La tâche pour les élèves est la même dans les deux activités : il s'agit de placer les sommets d'un rectangle dont deux sommets sont déjà fixés et les dimensions données.
Pour « Le problème rectangle » première expérience, les dimensions des rectangles proposés sont de 1 m sur 2 m, et de 9 m sur 7 m, les élèves travaillent dans la cour de récréation.

---

[29] S&B Chapitre C-3.

Ne constatant pas de différences dans les stratégies des élèves pour la construction de ces deux dimensions de rectangles, ils revoient quelques contraintes didactiques de la situation pour reprendre cette expérience, en particulier la possibilité d'une validation empirique par les élèves. Ils proposent « Le problème des bancs » en seconde expérience.
Cette fois-ci les sommets du rectangle sont les extrémités au sol des quatre pieds d'un banc : de 2m sur 40 cm ; et de 40 cm sur 5 cm. Ici non plus , ils ne constatent pas de différence entre les stratégies des élèves.
Ils notent :

> « La similitude des résultats a cependant attiré notre attention sur la similitude des rapports entre le sujet et le milieu : ceux-ci ont été maintenus invariants par le principe de notre expérimentation, malgré le changement de taille de l'objet sur lequel portait le problème posé aux enfants. En effet le grand banc, comme le petit est un objet qui peut être vu « d'un seul coup d'œil », déplacé sans difficulté réelle, éventuellement retourné.
> D'où la question suivante qui s'est imposée à nous :
> **Les caractéristiques globales des rapports avec le milieu ne seraient-elles pas plus déterminantes que la taille en ce qui concerne les modes de traitement de l'espace par le sujet, et par conséquent les représentations ?** (nous soulignons)
> Nous avons alors mis en doute la pertinence de la caractérisation des représentations par un milieu dont la taille serait le facteur déterminant, et par conséquent la pertinence des concepts de micro-espace, méso-espace, et macro espace, si on les différencie par ce seul facteur. Par contre nous avons donné plus d'importance aux contraintes portant sur les interactions possibles entre le sujet et le milieu, contraintes bien décrites par Galvez. » (p110)

Rappelons ces contraintes qui portent sur les actions que peut effectuer le sujet :
Pour le micro espace « tous les déplacements du sujet et de l'objet sont possibles : il y a une perception exhaustive de l'objet. ... Le sujet est à l'extérieur de l'espace. »
Pour le méso espace « les déplacements du sujet sont limités par la disposition des objets. ... Le sujet est à l'intérieur de l'espace, il a besoin de décentrations. »
Pour le macro espace « le sujet est à l'intérieur de l'espace, il a besoin de se décentrer pour intégrer et coordonner des perceptions fragmentaires. »

b) L'utilisation de ces concepts par S&B

Ils se sont alors « attelés à l'étude a priori des rapports entre le sujet et le milieu, *naturellement développés dans une problématique pratique, selon des déterminations liées à la taille* ». En fait ils délimitent trois catégories de situations : celles liées à la manipulation

de petits objets, celles liées aux déplacements dans l'environnement domestique, et celles liées aux déplacements dans les espaces de grande taille, « les grands espaces ».
Ils étudient les conceptions qu'un sujet développe naturellement à propos de certains concepts géométriques, comme les longueurs, les formes géométriques, les transformations, ...
Pour bien comprendre dans quelle optique ils effectuent ce travail, rappelons un de leurs fondements :

> « Nous nous appuyons sur l'hypothèse que la conceptualisation naît des limitations apportées à la résolution immédiate des problèmes rencontrés par une activité sensori-motrice. Suivant le type et l'importance des limitations opposées à l'action du sujet, les conceptualisations correspondantes peuvent être plus ou moins élaborées. Nous allons examiner quels rôles jouent les concepts géométriques de base dans la maîtrise de ces situations, c'est à dire jusqu'à quel degré leur conceptualisation est nécessaire pour résoudre les problèmes liés à chacune des trois familles d'interactions. » (p216)

Pour les conceptions micro-spatiales, c'est à dire celles développées dans le cadre de la manipulation des petits objets, pour laquelle la vue offre un contrôle global (des objets et des actions sur les objets) ils regardent successivement les objets, les formes géométriques, le repérage, les transformations géométriques, les grandeurs (longueur, aire, et volume).
Ce que nous en retiendrons est la non nécessité de conceptualiser ces aspects en général. La perception suffit à établir des distinctions, des repérages, des orientations.
Pour les conceptions méso-spatiales et macro-spatiales, le sujet faisant partie de l'espace, certaines notions sont appréhendées différemment : l'orientation, le repérage, les directions, les angles, ...

Nous n'allons pas entrer plus dans le détail et renvoyons le lecteur directement aux travaux qui sont extrêmement précis, fournis et détaillés[30]. Indiquons simplement un certain pessimisme : les situations pour lesquelles il est nécessaire de conceptualiser ses rapports à l'espace ne sont pas reproductibles à l'école simplement.

S&B ont quand même essayé de transférer les caractéristiques de ces milieux à ceux que l'on peut trouver dans les activités à l'école. Ils parlent de conditions micro, de conditions méso, et de conditions macro spatiales pour les qualifier. La condition macro correspond aux conditions d'une situation nécessitant l'usage de plans (c'est une partie importante de leurs expérimentations).
Mais dans ce transfert, taille et rapport à l'espace vont à nouveau être ambigus. C'est ce que nous allons voir maintenant.

[30] Chapitre C-4.

3. Question d'adaptabilité

Nous allons tenter de voir les limites de ces concepts et d'interroger leur pertinence dans l'analyse des activités pratiquées dans le cadre scolaire, cadre dans lequel justement les activités avec les objets ne se limitent pas à des manipulations et les activités ne portent pas dans leur ensemble sur des activités de déplacement.
C'est à partir d'une des situations étudiées par S&B, et d'un autre exemple pris en dehors de leurs travaux, que nous entamerons ce regard sur les limites de l'usage de ces notions.

a) La situation des tirelires[31] pour poser la question de l'adaptation de ces outils

La situation objective est la suivante :

> L'enfant dispose d'un ensemble de tirelires opaques et d'un certain nombre de jetons. Il doit placer un jeton et un seul dans chaque tirelire. Une fois le jeton à l'intérieur celui-ci n'est plus visible.
>
> « Le fait que les tirelires soient opaques empêche le contrôle visuel continu du déroulement de l'activité d'énumération : à chaque instant, on ne peut connaître, en jetant un coup d'œil sur les tirelires, celles où il a été déposé quelque chose et celles où il n'a encore rien été déposé ; autrement dit le problème est de pouvoir répondre à chaque instant à la question "qu'est-ce qui a été fait, qu'est-ce qui reste à faire ?" . » (p232)

Trois dispositifs sont proposés à des enfants de 4 ans :

- 20 boîtes d'allumettes vides fermées. Des allumettes sont à placer dans chaque boîte une par une, en refermant au fur et à mesure chacune des boîtes.
  L'enfant peut déplacer les boîtes, organiser leur disposition spatiale.

- 18 casiers « boîtes aux lettres » (3 rangées de 6 casiers, 2m50 de long). Des lettres à placer dans chaque boîte une par une, elles ne sont donc plus visibles une fois déposées.
  L'enfant ne peut pas déplacer les boîtes, il n'a pas la possibilité d'agir sur leur organisation spatiale.

---

[31] chapitre C5

- Des boîtes (de format petit, de type boîtes d'allumettes) sont disposées en quadrillage. Des haricots sont à placer dans chaque boîte un par un, en refermant au fur et à mesure chacune des boîtes.
  L'enfant ne peut pas déplacer les boîtes, il n'a pas la possibilité d'agir sur leur organisation spatiale.

Pour les dispositifs 1 et 3, l'environnement est constitué d'objets de même taille, mais les possibilités d'actions sont distinctes. Dans un cas on peut recourir aux déplacements des boîtes, dans l'autre cas non. Dans le premier cas donc, on pourra rester dans une problématique pratique pour la résolution du problème. Il suffira de contrôler les boîtes contenant une allumette en les plaçant au fur et à mesure dans un endroit de l'espace déterminé.
Par contre, si ces mêmes boîtes sont fixes et qu'on ne peut les déplacer, on doit faire intervenir un autre moyen pour contrôler les boîtes pleines et vides. On devra faire appel à un autre système d'organisation de la distribution des haricots, si les variables sont bien fixées pour mettre la mémoire en défaut.

Pour les dispositifs 2 et 3 par contre, le milieu matériel n'est pas constitué par les mêmes objets au sens de la taille, mais les conditions de contrôle sur les objets sont identiques. Petites ou grandes boîtes, elles sont disposées en quadrillage et on ne peut les déplacer.

Supposons qu'il y ait eu un autre dispositif constitué de « boîtes à lettres » mobiles, séparées les unes des autres, et placées dans un environnement assez vaste pour pouvoir les déplacer facilement et les organiser dans l'espace selon notre gré. Alors la taille correspond au deuxième dispositif, tandis que le contrôle des actions correspond au premier dispositif.

Nous saisissons bien sur l'ensemble de cet exemple l'existence des deux variables : taille et type de contrôle sur le milieu. Et il faut chaque fois préciser si nous nous plaçons du point de vue de la taille ou du point de vue du rapport au milieu pour parler de micro méso ou macro espace.
Car du point de vue de la taille, nous désignerions micro les conditions des dispositifs 1 et 3 ; tandis que les dispositifs 1 et 4 le seraient du point de vue des interactions au milieu.
Ou encore : le dispositif 4 envisagé relève-t-il de conditions micro ou de conditions méso ? Des premières suivant le type d'interaction au milieu ; mais des secondes du point de vue de la taille. Se plaçant du point de vue des rapports à l'espace, il nous paraîtrait cependant difficile de désigner comme conditions micro les conditions du milieu du dispositif 4. La situation serait bien éloignée d'une image à laquelle renvoie le mot « micro ».

Quand S&B pointent le dispositif 3 comme répondant à des conditions micro *et* méso spatiales, ils désignent implicitement une condition de taille *et* une condition sur le type d'interaction[32].

Il ne nous semble pas pertinent d'user alors de dénominations qui peuvent prêter à confusion sans cibler l'élément essentiel visé.

b) Un autre exemple : les sections du cube

Dans le dispositif d'apprentissage mis en place par M-P. Rommevaux[33] (que nous étudions au chapitre 3A-III) les élèves utilisent un cube transparent sur lequel ils peuvent (et doivent dans un premier temps) dessiner les intersections avec les faces du cube d'un plan donné par trois points situés sur les arêtes, pour ensuite dessiner la section en vraie grandeur et sur une représentation en perspective.

A priori du fait de sa transparence le cube offre un contrôle global de l'ensemble de ses faces, donc de lui-même. Par contre le travail de détermination des sections obtenues n'est pas simple.

Certaines positions des trois points sur les arêtes font coïncider les segments les joignant avec les segments définissant la section. Le contrôle est global sur les objets du travail.

Par contre d'autres positions ne permettent pas du premier coup d'œil, ni parfois du second, d'avoir une vue des sections obtenues. Le contrôle est alors partiel, il nécessite des choix de point de vue, et parfois de changement de point de vue.

Dans un certain cas (pour la section hexagonale) nous n'avons aucun contrôle global. Les changements de point de vue, le recollement des vues ne suffisent plus. Les éléments du milieu (objets, outils, actions possibles, connaissances) deviennent insuffisants pour résoudre le problème.

Cet exemple est donné ici pour renforcer la séparation à faire entre la question de la taille des objets, avec celle des interactions avec ces objets. C'est une situation avec des objets de petite taille (répertoriés micro) pour lesquels nous pouvons observer différents types d'interactions (micro, méso, macro).

4. Conclusion

---

[32] Comme pour les problèmes « rectangle et banc », S&B constatent que c'est la variable « type d'interaction au milieu » et non la taille de l'espace qui influence les stratégies des élèves.

[33] ROMMEVAUX M-P. (1997) *Le discernement des plans : un seuil décisif dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle*, Thèse, U. Louis Pasteur, Strasbourg I, Ed. IRMA.

La distinction micro, méso, macro, est adaptée pour l'étude des situations de déplacements, qui sont une partie des activités de géométrie à l'école primaire. S&B se sont d'ailleurs penchés sur ce type d'activités, et une part importante de leurs expérimentations concerne des situations rendant nécessaire l'écriture ou la lecture de plans.
Mais nous ne pouvons retenir cette distinction telle quelle pour une étude détaillée des situations en géométrie en général, car elle ne permet pas de clarifier, dans l'étude des interactions des élèves avec le milieu, ce qui relève de la taille de l'espace, ou des types de rapport à cet espace.

D'autre part il est fait souvent une confusion entre micro espace et environnement graphique (papier crayon ou ordinateur). Or il est difficile de concevoir qu'un travail autour des petits objets de l'espace puisse être de même nature, c'est à dire induire les mêmes problématiques, qu'un travail dans l'environnement graphique.
Cette autre raison nous pousse également à écarter ces notions de notre vocabulaire et des outils d'analyse.

Cependant voici ce que nous apprend la distinction faite entre micro, méso, et macro espace, et que nous retiendrons :

La mise en évidence de la variable taille de l'espace, en tant que variable du milieu matériel avec lequel l'élève est en interaction. Bien que les expérimentations de S&B soient plutôt contradictoires avec cette affirmation, il nous semble qu'elle est malgré tout à retenir. Cependant elle n'agit pas directement sur les procédures des élèves. Nous essayerons de montrer par la suite qu'*elle agit en tant qu'indicateur d'un certain environnement, et par rapport à la place qui est laissée au spatial dans la situation.* C'est plus une variable pour l'appréhension d'un problème, sa mise en congruence avec une réalité. *La taille de l'espace ou des objets de l'espace du milieu objectif est peut-être une variable agissant sur la dévolution d'un problème spatial.*

La mise en évidence des *contraintes de contrôle* portant sur le milieu et les actions que l'on peut exercer sur le milieu, c'est à dire le type d'interaction possible avec les éléments du milieu objectif.

Présentons maintenant les différentes parties qui constituent la suite du travail, ainsi que notre méthodologie.

V. Plan d'étude et méthodologie

1. Les objectifs de la recherche

Dans la suite de cette étude, nous allons tenter de répondre aux différentes questions posées dans les paragraphes précédents, en nous appuyant sur des analyses d'exemples ou de situations, sur des approfondissements de réflexions, sur des expérimentations ; analyses guidées par les outils théoriques définis préalablement au long de ce chapitre.

Ainsi dans la deuxième partie nous développerons la problématique de l'articulation du spatial et du géométrique dans le cadre de l'usage des dessins en géométrie. Notre objectif de recherche est de repenser une problématique intrinsèque à la géométrie pour avancer dans sa prise en compte dans le cadre de l'enseignement actuel de la géométrie à l'école élémentaire.
Un chapitre est consacré à l'usage des dessins de géométrie associés à des objets géométriques du plan ; un second chapitre est consacré à l'usage des représentations planes utilisées en géométrie dans l'espace.

La troisième partie développe l'hypothèse d'une possibilité d'utiliser l'espace sensible pour y réaliser des expériences spatiales permettant une entrée dans le géométrique par la formulation explicite de propriétés relatives à certaines notions. Nous y détaillons une analyse concernant l'ostension comme un procédé didactique qui peut être efficace sous certaines conditions. Deux thèmes au programme de l'école élémentaire sont étudiés : les patrons de solides, et la symétrie axiale.

Pour la quatrième partie, notre objectif de recherche est de penser l'articulation du spatial et du géométrique dans le cadre d'une situation de modélisation. Partant d'une situation fondamentale de la géométrie comme modèle de l'espace, la situation « Terrain et tige », nous avons élaboré cinq séances de travail dans une classe de l'école élémentaire afin de saisir des questions de recherche non encore prises en compte, d'étudier par rapport à celles que nous avons posées des réflexions et des pistes de réponses, et d'en déduire des éléments pour l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire.

2. Les expérimentations pour la recherche

Au cours des cinq années de recherche, nous avons mené plusieurs types de travaux expérimentaux. Citons en premier celui mis en place spécifiquement pour ce travail, **l'expérimentation autour de la situation « Terrain et tige ».**

Cinq séances de travail dans la classe de CM2 de Mr. Itzkovitch, instituteur maître formateur, à l'école Eugénie Cotton de Rosny sous Bois, Seine Saint Denis, dans le courant des mois de mai et juin 2000. Les séances ont été prises en charge par moi-même. Nous disposons des supports vidéo de chacune d'elles, des travaux des élèves, des notes personnelles et comptes-rendus réalisés à chaud après chaque séance.

Les autres travaux ont été réalisés dans le cadre de la formation des professeurs des écoles[34] : en formation initiale deuxième année, dans le cadre de « cours de mathématiques », d'ateliers professionnels (dispositif spécifique de travail dans les classes), et pour la réalisation de mémoires professionnels ; en formation continue, à l'occasion de rencontres de professeurs de cycle 3 et professeurs de collèges pour la liaison CM2/6ème, ou de stages longs de formation continue ; et dans le cadre de travaux en partenariat avec des instituteurs maîtres formateurs.

Les principaux thèmes travaillés sur lesquels nous nous sommes appuyée pour ce travail de recherche, pour lesquels nous disposons de données sont les suivants :

Solides et patrons de solides

- Un document de formation que nous avons réalisé à partir de séances élaborées et mises en œuvre avec des professeurs des écoles stagiaires deuxième année, au cours de l'année 1997/1998. Ce document est conçu dans l'optique d'une dévolution aux enseignants de certains aspects posés dans cette recherche, mais c'est avec le point de vue du formateur qu'il a été rédigé (chapitre 1, annexe 2).
- Une passation en janvier 1999 dans la classe de CM1/CM2 d'Isabelle Peltier-Lécullé, instituteur maître formateur en Seine Saint Denis. Cinq exercices sont proposés à propos des patrons de solides. Nous disposons des travaux d'élèves et du document de synthèse réalisé pour l'exploitation (chapitre 3B, annexe 1).
- Une analyse de trois collections de manuels du CP au CM2 sur les patrons de solides (chapitre 2B, annexe 1)

Les représentations de solides en perspective

- Une analyse de manuels (chapitre 2B, annexe 1)
- Un compte rendu d'une séance en formation continue, lors d'un stage « Mathématiques / Technologie » en mai 2001 (chapitre 2B, annexe 6)

---

[34] Durant les quatre premières années de recherche, en tant que professeur IUFM premier degré au centre de Livry-Gargan de l'IUFM de l'académie de Créteil ; la cinquième année, même fonction aux centres d'Aix et de Marseille de l'IUFM de l'académie d'Aix-Marseille.

La symétrie axiale

- Un compte rendu d'une séance en formation continue, lors du même stage « Mathématique / Technologie », mai 2001 (chapitre 3C, annexe)
- Un compte rendu des séances réalisées en formation initiale deuxième année au cours de l'année 2001.

Deuxième partie

Les images de géométrie dans l'articulation du spatial et du géométrique

Chapitre 2A
De l'usage des dessins en géométrie plane

Chapitre 2B
Représentations planes d'objets de l'espace

CHAPITRE 2A

DE L'USAGE DES DESSINS EN GÉOMÉTRIE PLANE

Dans ce chapitre, les objets considérés seront les objets géométriques du plan.

Les objets géométriques possèdent un caractère d'idéalité, d'objets conçus par l'esprit, mais en liaison avec divers objets de l'espace sensible qui en constituent des représentations, permettant de se construire des images, cognitives, mentales, pour concevoir ces objets éléments d'une théorie géométrique, ici la géométrie euclidienne.

Evidemment « les images » ne sont pas seulement des images qui se constituent dans notre pensée. Il est aussi pour un grand nombre de concepts en géométrie, des images que l'on fabrique sur une feuille de papier, ou tout autre support plus ou moins plat, nous permettant de visualiser un dessin, une représentation, renvoyant elle aussi à un objet géométrique ; une image graphique. Du fait de leur consistance matérielle, ces dessins participent du « monde des réalisations », des objets de l'espace, mais de l'espace graphique particularisé par sa planéité. C'est pourquoi nous pourrons aussi appeler ces images des objets spatio-graphiques.

Ainsi la question de l'articulation du spatial et du géométrique se trouve ici spécifiée, à la question du statut des images que l'on produit dans le cadre de l'apprentissage de notions géométriques.

Dans un premier paragraphe seront exposés des rappels de la problématique classique des « figures » en géométrie, de leur caractère spatial incontournable, et donc de l'articulation de ce spatial et du géométrique sous-jacent.
Ensuite dans les deux paragraphes suivants, nous reprendrons la question de la particularité de l'environnement graphique dans le travail en géométrie, spécifiée à l'entrée dans une problématique géométrique d'une part, et à l'entrée dans une problématique de modélisation d'autre part.

Plan du chapitre

I. Une problématique intrinsèque à la géométrie

1. Distinction dessin, figure et objet géométrique

Nombreux et plus ou moins anciens sont les travaux portant sur cette problématique de la différence entre les objets de la géométrie, théoriques, et les objets spatiaux qui peuvent leur être associés.

Nous nous contenterons d'en rappeler les principaux aspects, en suivant le discours de C. Laborde et B. Capponi (notés par la suite L&C) à propos de leurs travaux autour de l'environnement Cabri-géomètre[1]. En effet ils sont amenés du fait de la construction et des fonctions de ce logiciel, à repenser l'articulation entre les objets géométriques et les objets de l'espace graphique.

Sans entrer dans le détail de leurs travaux, nous leur emprunterons quelques rappels généraux et hypothèses de travail.

> « En tant qu'entité matérielle sur un support, le dessin peut être considéré comme un signifiant d'un référent théorique (objet d'une théorie géométrique ...). La figure géométrique consiste en l'appariement d'un référent donné à tous ses dessins, elle est alors définie comme l'ensemble des couples formés de deux termes, le premier terme étant le référent, le deuxième étant un des dessins qui le représente ; le deuxième terme est pris dans l'univers de tous les dessins possibles du référent. **Le terme de figure géométrique renvoie dans cette acception à l'établissement d'une relation entre un objet géométrique et ses représentations possibles.** [...]
> Les rapports entre dessin et objet géométrique peuvent être grossièrement caractérisés par le fait que les propriétés de l'objet géométrique se traduisent graphiquement par des relations spatiales. » (p168)

Le problème rencontré dans l'enseignement de la géométrie est alors le suivant : les propriétés d'un dessin sont nombreuses et de natures diverses ; en particulier beaucoup diffèrent de celles représentant les propriétés géométriques du référent.

Comment avoir une bonne lecture de ces propriétés, comment reconnaître que telle propriété traduit (représente) une propriété géométrique, et que telle autre n'est pas en lien avec le géométrique ?

---

[1] LABORDE C. et CAPPONI B. (1994) *L'apprentissage de la notion de figure géométrique*, RDM vol 14 n°1.2. Sauf mention contraire, les citations des travaux de L&C sont extraites de cet article. Le numéro des pages faisant suite aux citations y réfère.

Certaines propriétés comme l'orientation du dessin, la position des dessins les uns par rapport aux autres, sont des propriétés spatiales souvent considérées par les élèves comme des propriétés géométriques. Depuis longtemps on a montré qu'elles pouvaient constituer des obstacles didactiques ; par exemple l'orientation de l'axe de symétrie dans l'apprentissage de la symétrie axiale (travaux de D. Grenier[2]), la position de figures homothétiques dans l'apprentissage de l'homothétie en seconde (travaux de C. Lémonidis[3]), et d'autres constats faits à l'occasion d'évaluations (travaux d'EVAPM[4], documents d'évaluation, ...).

L'origine de ces obstacles est à la fois didactique et épistémologique.
Didactique dans la mesure où les premiers dessins rencontrés par les élèves et les exemples génériques utilisés dans les leçons pour définir des objets géométriques donnent à voir des images constituées en images de référence, en images possédant les caractéristiques de l'objet.
Epistémologique car tenant à cette problématique interne à la géométrie : l'objet géométrique se donne à voir par un ensemble d'images qui ne sont pas cet objet, à la fois en amont pour le concevoir, le penser, mais aussi pour l'utiliser.

a) Les questions d'interprétation

Un dessin possède bien plus de propriétés que les propriétés géométriques, il possède des propriétés topologiques, de mesures, d'orientation, il réfère à d'autres images, ...
Avant tout, il n'est pas indissociable d'un individu, sujet producteur du dessin ou sujet lecteur.
Considérons avec L&C le rapport avec un sujet lecteur :

> « D'une part, un dessin géométrique n'est pas nécessairement interprété par son lecteur comme renvoyant à un objet géométrique.
> D'autre part les interprétations d'un même dessin en tant que signifiant d'un objet géométrique sont multiples pour deux raisons : la première tient à ce que les interprétations dépendent du lecteur et de ses connaissances, la deuxième tient à la nature même du dessin ; à lui seul il ne peut caractériser un objet géométrique. » (p169)

---

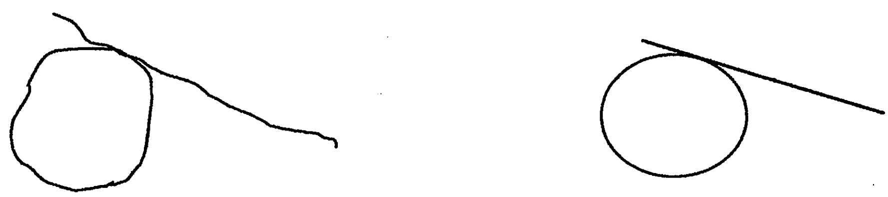
[2] GRENIER D. (1988) *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie axiale*, Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble.

[3] LEMONIDIS E.C. (1990) *Conception, réalisation et résultats d'une expérience d'enseignement de l'homothétie*, Thèse, IRMA, Université Louis Pasteur, Strasbourg.

[4] Etudes de l'APMEP « Evaluation des programmes de mathématiques » à différents niveaux du collège et du lycée.

La première assertion est suffisamment limpide pour éviter les exemples. Nous pouvons cependant la compléter en soulignant l'aspect culturel de la géométrie ; **l'interprétation « d'un point de vue géométrique » n'a rien de naturel et procède d'une éducation.**

Reprenons par contre l'exemple cité par L&C pour expliciter la deuxième affirmation, car il nous paraît tout à fait significatif.



> « Dans un contexte mathématique, un mathématicien reconnaîtra sans nul doute un cercle dans le dessin de gauche et sera plus réticent pour le faire pour le dessin de droite alors que l'ensemble des marques d'encre sur le papier du dessin de droite est probablement une meilleure approximation aux moindres carrés d'un cercle. »

En effet, il faut prendre en compte le choix du type d'interprétation d'un dessin. Un mathématicien interprète un dessin en lui rattachant des référents, objets d'une théorie géométrique. De ce point de vue, le premier dessin renvoie en effet à un cercle, tandis que le second renvoie plutôt à une ellipse qui n'est pas un cercle.

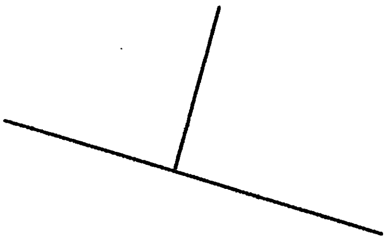
Quel choix d'interprétation font les élèves dans les classes ?
Jamais ou rarement celui du mathématicien. C'est un type d'interprétation à construire. La question didactique est alors : comment éduquer les élèves à une interprétation géométrique des dessins ? Ou peut-être plus précisément et justement : **comment faire la dévolution aux élèves de la problématique soulevée par les dessins en géométrie ?**
L&C s'interrogent également sur les choix d'interprétation que les élèves sont en droit de faire.

> « Quelles informations licites sur l'objet géométrique l'élève est-il en droit de tirer du dessin ? »
> [...]
> « Par exemple, si les tracés de deux droites sur le dessin fourni en entrée de la tâche semblent parallèles, accepte-t-on que l'élève infère qu'il s'agit de représentation de deux droites parallèles, ou demande-t-on qu'il s'en assure par des mesures (angles ou longueurs) sur le tracé ? Mais alors quelle tolérance permet-on sur les mesures ? ... » (p181)

Plus généralement lorsqu'un dessin est fourni dans un énoncé, quel statut a-t-il ? A quel espace de travail fait-il référence ? La tâche porte-t-elle sur les dessins eux-mêmes en tant qu'objets spatiaux (du plan) ; ou sur les objets géométriques auxquels renvoient ces dessins ?

Regardons cette question sur un autre exemple[5] :

L'angle formé par les deux segments est-il droit ?



Deux segments sont tracés sans autre information fournie.
Voici notre proposition de réponse :
« D'un point de vue géométrique, je ne peux pas répondre, je n'ai pas d'information de type géométrique (un codage par exemple, c'est à dire une convention de transcription d'une propriété géométrique en propriété visuelle).
Par contre d'un point de vue spatial, en prenant mon équerre, compte tenu d'une certaine marge d'incertitude de quelques degrés, je peux déclarer que cet angle est droit. Il est raisonnable d'affirmer cela dans notre champ de perception, si nous changions notre marge d'incertitude et nous placions dans des intervalles de millièmes de degré, nous pourrions déclarer que cet angle n'est pas droit, pour cette norme. »

La réponse est longue ! Mais elle est claire relativement à la problématique posée. En effet, elle assume la différence de point de vue (d'espace de référence, de statut des objets de la question) ; elle précise dans le cadre spatial une certaine norme qui définit la validité de la réponse ; elle précise les moyens de la résolution (les connaissances, outils ou savoirs en jeu).

Penchons-nous maintenant sur des énoncés de problèmes en géométrie, pour reprendre la question de l'espace auquel il est fait référence.

b) Quel espace de référence ?

Voici quelques exemples cités par H-C. Argaud[6] dans son travail de thèse, pour indiquer en quoi les énoncés de tâches en géométrie proposés à l'école élémentaire ou au collège ne prennent pas en compte l'existence de la problématique « figures en géométrie ».

---

[5] Exemple proposé dans le cadre de travaux en didactique menés entre l'IUFM de Lorraine et d'Orléans-Tours sous la direction de B. Parzysz en formation initiale de professeurs des écoles. Un compte rendu d'étude se trouve dans B. Nicolas-Lorrain (2000).

[6] ARGAUD H-C. (1998) *Problèmes et milieux a-didactiques, pour un processus d'apprentissage en géométrie plane à l'école élémentaire, dans les environnements papier-crayon et Cabri-géomètre,* Thèse équipe EIAH, Laboratoire Leibniz, IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

- le domaine de référence est explicitement celui des objets spatio-graphiques

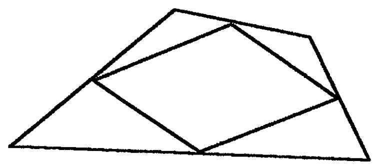
  Dessine un triangle qui a deux côtés de même longueur.

- le domaine est explicitement celui des objets géométriques (à noter ici l'absence de dessin dans l'énoncé) :

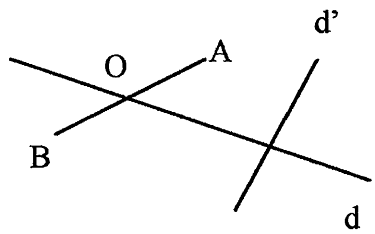
  Soit ABCD un parallélogramme de centre O. Une droite passant par O coupe [AB] en J et [CD] en L. Une autre droite passant par O coupe [AD] en I et [BC] en K.
  Démontrer que IJKL est un parallélogramme.

- le domaine est ambigu ou implicite :

  ABCD est un quadrilatère. M, N, P et Q sont les milieux des côtés.
  Le quadrilatère MNPQ est-il un parallélogramme ?
  A quelle condition MNPQ est-il un losange ?
  (dessin fourni avec les points notés)



  Construire une figure comme celle-ci avec OA=OB.
  Construire les projections E et F des points A et B sur la droite (d), parallèlement à (d').
  Quelle est la nature de AEBF ? Justifier.



Voici quelques évidences que ces exemples illustrent :

- En général, pour des tâches de reproduction, tracés ou constructions de dessins, les objets du problème sont *de fait* les dessins. L'espace de référence est l'espace graphique.
- En général, lorsqu'il est demandé de démontrer, les objets à considérer doivent être théoriques. L'espace de référence est l'espace géométrique.
- Et entre ces deux généralités, il règne la plus grande confusion[7].
- En général également, dans les sujets du collège, un dessin est considéré dans un même problème, à la fois comme objet du problème, et à la fois il est à négliger au profit de l'objet géométrique auquel il renvoie.

[7] Voir aussi S&B p84, une analyse succincte mais claire sur l'usage des dessins dans les manuels de 6ème et 5ème, dans le paragraphe intitulé « Confusion de langage ».

Ce que nous retiendrons malgré tout :
La présence d'un dessin dans un énoncé de problème donne de fait un caractère spatial à l'espace de référence, et crée de façon incontournable une confusion quant au domaine des objets sur lesquels porte le problème.

2. Propriétés géométriques, propriétés spatiales et propriétés visuelles

L&C définissent « le domaine de fonctionnement d'un dessin » comme

> « l'ensemble des propriétés géométriques représentées par certaines des propriétés spatiales du dessin ». (p171)

Evidemment on ne peut connaître a priori ce domaine de fonctionnement, sans autre indication sur un dessin. Il est nécessaire que le dessin soit accompagné d'un texte, ou de certaines conventions spécifiant la présence de propriétés géométriques.

> « Inversement toutes les propriétés spatiales du dessin ne peuvent être interprétées comme renvoyant à des propriétés de l'objet, au dessin est attaché un *domaine d'interprétation.* »

Le constat est le suivant : dans les problèmes de géométrie proposés aux élèves dont les énoncés utilisent des dessins, **le domaine de fonctionnement est laissé au hasard, et les élèves raisonnent sur le domaine d'interprétation.**

Pour préciser le domaine d'interprétation, nous distinguons propriétés spatiales et propriétés visuelles : nous entendons par propriétés visuelles d'un dessin, les propriétés relatives à des informations modélisables géométriquement (par exemple le parallélisme, les isométries de longueurs, les angles droits ...) ; et par propriétés spatiales les propriétés du dessin en tant qu'objet spatial dans l'environnement graphique (l'orientation, la place dans la feuille de papier ...).

L'ensemble des propriétés visuelles et spatiales d'un dessin concerne à la fois la traduction de propriétés géométriques des objets référents, mais aussi des propriétés propres au dessin, sans lien avec ces objets. Comment faire alors pour distinguer celles qui traduisent de telles propriétés de celles qui n'en traduisent pas ?
Le dessin à lui seul ne peut donner ces informations. Il est nécessaire qu'il soit accompagné d'un texte ou de certaines conventions spécifiant la présence de propriétés géométriques.
Or le constat en général est le suivant : dans les problèmes de géométrie proposés aux élèves dont les énoncés utilisent des dessins, les informations permettant de cerner les propriétés

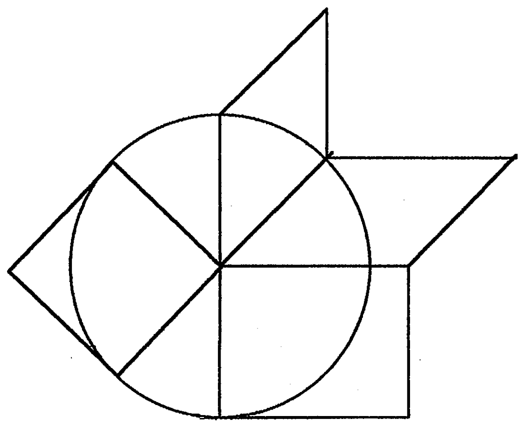
visuelles et spatiales traductrices de propriétés géométriques ne sont pas explicites ; et les élèves interprètent toutes les propriétés comme des propriétés géométriques.

Quelques exemples concernant plutôt l'école élémentaire sont donnés dans les paragraphes suivants pour préciser ce point.

a) Transparence du visuel ?

Exemple[8] d'activité d'observation, où les auteurs semblent tenir pour transparente la lecture des propriétés visuelles du dessin lorsqu'il est fourni seul (cette activité est souvent rencontrée dans les manuels scolaires de l'école élémentaire) :

Observe attentivement la figure.
Repasse, en couleur, les côtés d'un losange de cette figure.



Les commentaires précisent :

> « Cet exercice se situe entre la géométrie de perception et la géométrie déductive. L'énoncé complète en partie la figure qui n'est pas codée. [...] La présence du cercle permet en partie d'argumenter (par exemple : distinguer carré et rectangle non carré en s'appuyant sur la définition du cercle). »

Quelles sont les propriétés du dessin qui traduisent sûrement des propriétés géométriques ? L'égalité de longueur des segments rayons du cercle (à supposer que leur point commun soit bien le centre du cercle, et que le cercle soit bien un cercle !). Et c'est tout !
Les angles droits, les égalités de longueurs des autres segments, ou le parallélisme, qui permettraient de *savoir* que les quadrilatères sont un carré, un losange, un rectangle, un parallélogramme, ne sont pas donnés explicitement. Elles sont à lire visuellement.
La lecture des propriétés géométriques est donc laissée à l'initiative du lecteur.

---

[8] extrait de l'évaluation nationale à l'entrée en 6ème, septembre 2000.

Comment auraient-elles pu être spécifiées ?
Avec un texte descriptif d'accompagnement du type : « Nous avons dessiné un cercle, et un carré, un losange, un rectangle, et un parallélogramme. Les quatre sommets communs de ces quadrilatères sont confondus avec le centre du cercle, et certains autres sommets sont sur le cercle, d'autres non. »

Bien sûr certaines données ne sont toujours pas fournies : les points situés sur le cercle ne sont pas précisés dans le texte, cela est laissé à la charge de la figure. C'est parce que nous considérons qu'une interrogation du type « les points sont-ils vraiment sur le cercle, ne sont-il pas à quelques dixièmes de millimètres extérieurs au cercle, non visibles à l'œil nu ... ? » n'est pas une question pertinente puisque si les points n'étaient pas sur le cercle (en géométrie), ils ne le seraient pas non plus sur le dessin, et ceci de façon *clairement identifiable visuellement.*
Si un énoncé joue sur une confusion de ce genre c'est par volonté d'étudier la question du rapport des sujets aux dessins, objets spatiaux, ou référents d'objets théoriques. Or ce n'est pas le cas dans cet exercice, dont on peut se demander alors quel est l'objectif d'évaluation.

Autre remarque concernant la proposition de texte d'accompagnement, la volonté de mettre de côté le problème des familles et sous-familles (le carré, losange ou rectangle particulier ; parallélogramme quelconque et parallélogrammes particuliers) pour ne pas alourdir l'énoncé, mais surtout parce qu'en fin de CM2, ces subtilités relèvent d'une classification dans le cadre de la théorie géométrique, et ne sont pas encore constituées pour les élèves.

Un autre point à discuter est le renvoi théorique des auteurs à deux types de géométrie « la géométrie de perception » et « la géométrie déductive » ; et la croyance en une articulation entre les deux en termes de rupture dans un contexte qui ne prend absolument pas en compte la problématique fondamentale des figures en géométrie.
Il nous semble que cette position est erronée, et non pertinente pour penser les apprentissages en géométrie à l'articulation école, collège.

En effet il y a des choix et des positions de principe à affirmer :
Si l'objectif d'un tel exercice est d'étudier les compétences des élèves à argumenter, il faut que la tâche porte clairement sur une argumentation. Cependant, même si l'énoncé était clair, avec un domaine de fonctionnement bien spécifié, rien ne justifierait d'adopter un point de vue géométrique pour l'argumentation. Le recours aux mesures, ou au compas, pour argumenter que telles longueurs sont ou non égales, est tout autant valable, même dans un contexte appelé « exercices de géométrie ».

C'est donc une attitude particulière que celle consistant à utiliser un type d'arguments que sont des connaissances géométriques (ici « tous les rayons d'un même cercle ont même longueur »).
Le passage entre le recours à la perception, ou aux instruments, ou à des formulations de propriétés géométriques, ne s'effectue pas dans une rupture et un passage hiérarchique de l'un vers l'autre. Les trois aspects existent simultanément, il faut les entrevoir, en avoir conscience, à la fois simultanément et de manière dissociée, et ensuite faire le choix (arbitraire ou obligé (par l'institution)) d'adopter telle ou telle attitude.

Nous reprendrons cette question au paragraphe II, en regardant plus précisément l'articulation entre l'entrée dans une problématique géométrique et l'usage de l'environnement graphique.

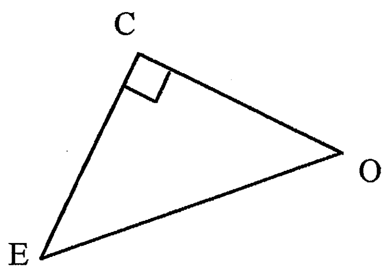
b) Le codage : un moyen de spécifier des propriétés géométriques

Le codage peut être défini comme une convention de transcription d'une propriété géométrique en propriété visuelle.

Cependant, il reste insuffisant.

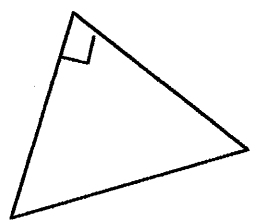
Par exemple[9] :

Quelle est la nature du triangle ECO ?
Comment le savez-vous ?



Nous avons appris à interpréter ce codage (le carré ou rectangle appuyé sur deux segments) comme signifiant de deux segments définissant un angle droit ; cela permet d'affirmer que d'un point de vue géométrique le triangle ECO est rectangle en C.
Mais nous pourrions ajouter :
Visuellement le triangle présente une autre propriété, celle d'avoir deux côtés de même longueur. Et comme la propriété géométrique de perpendicularité est bien traduite pour l'œil, on peut dire que le triangle ECO en tant que dessin, et non comme objet géométrique, est un triangle rectangle isocèle.

Nous pourrions également imaginer le dessin ci-contre, où des éléments sont codés, mais le dessin ne possède pas la propriété visuelle traduisant la propriété géométrique correspondante. Le triangle en tant qu'objet



[9] extrait de la même étude B. Nicolas-Lorrain.

géométrique est un triangle rectangle et en tant que dessin c'est un triangle isocèle non rectangle.

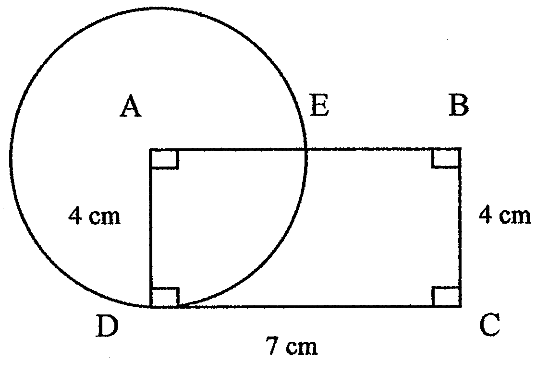
Ce procédé est souvent utilisé au collège pour travailler sur « voir l'objet géométrique » en prenant de la distance par rapport à l'objet spatio-graphique, et en déduire des propriétés géométriques. Mais il peut être surtout utile dans le cadre de la géométrie dans l'espace, pour l'usage des représentations planes d'objets, où les propriétés géométriques ne se traduisent pas toutes en propriétés visuelles (et réciproquement).

Ainsi, ce n'est pas la présence du codage qui permet de spécifier le point de vue sur le dessin et le type de discours à construire à partir de lui. Mais il est un moyen pour préciser une partie des propriétés géométriques à lire. Notons aussi que son usage (compréhension et utilisation) relève d'un apprentissage. Une question reste ouverte : dans quelles situations le codage va-t-il prendre du sens pour les élèves comme lié à la problématique de distinction entre les propriétés visuelles (et spatiales) et les propriétés géométriques dans un dessin ?

c) Les mesures sur dessins

Reprenons un exercice posé dans l'évaluation nationale à l'entrée en $6^{ème}$ (1997) :

> Sur ce dessin à main levée (les vraies grandeurs sont écrites en cm), on a représenté un rectangle ABCD et un cercle de centre A qui passe par D. Ce cercle coupe le segment [AB] au point E. Trouve la longueur du segment [EB]. Explique ta réponse.



Dans les résultats de l'évaluation plus de 50% des élèves font référence ou bien à « E milieu du segment [AB] » propriété visuelle, ou bien à une prise de mesures directement sur le dessin, propriété spatiale ; et le score de réussite est inférieur à 15%. Pour le même exercice donné avec un dessin où [BE] est nettement supérieur à [AE] (environ deux fois et demi), le pourcentage d'élèves faisant explicitement référence au mesurage direct sur la figure est

environ de 30% ; le score de réussite est moins de 20%. C'est bien un problème de contrat qui se dégage ici. Quel contrat pour la lecture du dessin ?
Même si le problème était proposé sans aucune mention des mesures sur le dessin et un texte qui précise « le rayon du cercle est 4 cm et CD = 7 cm. Combien mesure [EB] », bien que moins trompeur, la propriété visuelle « E milieu de [AB] » est trop prégnante pour être négligée par les élèves. C'est donc une ambiguïté volontairement créée par les auteurs. Dans quel but ? Nous revenons à une question précédente sur les objectifs d'un tel exercice dans le cadre d'une évaluation. Est-ce étudier les rapports des élèves aux objets de l'environnement graphique ?

D'une façon plus générale, dans presque tous les exercices proposés aux élèves, qui mettent en jeu des dessins, avec des dimensions, sans nécessairement respecter l'échelle, voire même les proportions, le constat précédent est identique. Les élèves utilisent les mesures des dessins et n'interprètent pas le lien entre mesures des vraies grandeurs et mesures des grandeurs dessinées.

Il faut déduire de l'expression « vraies grandeurs » que les mesures données sont internes à un problème spatial initial, seulement évoqué ici : le tracé d'un rectangle de dimensions 4 cm et 7 cm, et le tracé d'un cercle de centre un des sommets passant par l'autre extrémité du côté correspondant de 4 cm. La recherche (mesure d'une longueur) porte sur la partie du côté de 7 cm, située à l'extérieur du cercle.

Or le problème posé dans l'exercice d'évaluation n'est pas celui-ci, ou pas tout à fait. Il évoque celui-ci, mais soumet un énoncé avec déjà un choix de schématisation du problème (dessin à main levée, avec non respect des proportions, et indication des mesures).
Le dessin de l'énoncé est un schéma. Il s'agit pour les élèves de faire un travail de transcription des propriétés lues ou déduites sur le schéma, en propriétés des objets spatiaux initiaux. Sont en jeu alors, des connaissances et compétences liées à une démarche de modélisation. Le faible taux de réussite, et les différentes réponses des élèves, nous paraissent être la marque d'une **absence de démarche de modélisation dans l'enseignement ; et d'une non prise en charge d'un apprentissage du dessin comme moyen de schématiser un problème spatial** (point développé au paragraphe III).

3. Positionnement pour la recherche

Les éléments entrevus dans les paragraphes précédents que nous retenons sont les suivants :

- « La présence d'un dessin dans un énoncé de problème donne de fait un caractère spatial à l'espace de référence, et crée de façon incontournable une confusion sur le domaine des objets sur lesquels porte le problème ». De plus :

  « ... **la reconnaissance visuelle de propriétés spatiales** [visuelles et spatiales au sens où nous l'avons défini] **associées aux propriétés géométriques n'est pas spontanée et doit être l'objet d'un apprentissage**. L'association entre visuel et géométrique prend difficilement du sens dans l'environnement papier crayon qui écrase la distinction entre visuel et géométrique. » (L&C p 205)

- « Le passage entre le recours à la perception, ou aux instruments, ou à des formulations de propriétés géométriques, ne s'effectue pas dans une rupture et un passage hiérarchique de l'un vers l'autre. Les trois aspects existent simultanément, il faut les entrevoir, en avoir conscience, à la fois simultanément et de manière dissociée, et ensuite faire le choix (volontaire ou obligé (par l'institution)) d'adopter telle ou telle attitude. »

- « Le constat d'une absence de démarche de modélisation dans l'enseignement et d'une non prise en charge d'un apprentissage du dessin comme moyen de schématiser un problème spatial. »

Reprenons pour élargir ce positionnement une remarque de L&C, extraite de leur conclusion de travail autour de Cabri-géomètre (en gras nous soulignons) :

> « ... l'environnement Cabri-géomètre a été conçu pour permettre la distinction entre visuel et géométrique. L'observation des élèves montre que de plus le géométrique peut apparaître dans Cabri-géomètre comme *un moyen de reproduire du visuel ou de l'expliquer* (explication du comportement d'un Cabri-dessin). Le géométrique ne serait pas seulement construit dans cet environnement pour pallier les limites du visuel mais aussi en lien avec le visuel ; **le géométrique est un *outil de modélisation du visuel*.** C'est une dimension qui nous paraît intéressante dans la mesure où la géométrie trouve son origine dans le contrôle des phénomènes spatiaux.
>
> Entre d'une part l'écrasement entre visuel et géométrique et d'autre part la rupture entre ces aspects, une voie différente nous semble possible dans laquelle **l'apprentissage de la géométrie dans ses débuts consisterait en *l'apprentissage du contrôle des rapports entre visuel et géométrique*.** L'environnement Cabri-géomètre offre des possibilités d'organisation d'un milieu pour l'apprentissage de ce contrôle pour trois raisons :
>
> - les phénomènes visuels prennent de l'importance de par la dimension dynamique du Cabri-dessin ;

- ces phénomènes sont contrôlés par la théorie puisqu'ils sont le résultat d'une modélisation graphique d'un modèle analytique de propriétés géométriques ;
- les possibilités sans fin de situations géométriques qui peuvent être visualisées avec un grand nombre d'objets et de façon précise. » (p205)

En nous restreignant malgré tout à l'environnement graphique papier-crayon nous reprenons à notre compte quelques perspectives formulées par L&C pour les développer dans les deux paragraphes suivants :

- **l'environnement graphique comme laboratoire d'expérimentation de phénomènes géométriques, ou de conversion et traitement de problèmes de géométrie.**

- **l'environnement graphique, comme environnement pour la modélisation de problèmes spatiaux (que l'on pourra ensuite traiter géométriquement).**

II. De l'usage des dessins dans une problématique géométrique

Nous nous plaçons ici dans un premier temps au niveau de l'expert confronté à un problème de géométrie. C'est l'expert du collège ou de l'école élémentaire dont nous parlons, pour rester dans un cadre d'analyse cohérent, et en tirer des leçons (questions ou hypothèses de travail) concernant le travail dans les classes de l'école élémentaire.

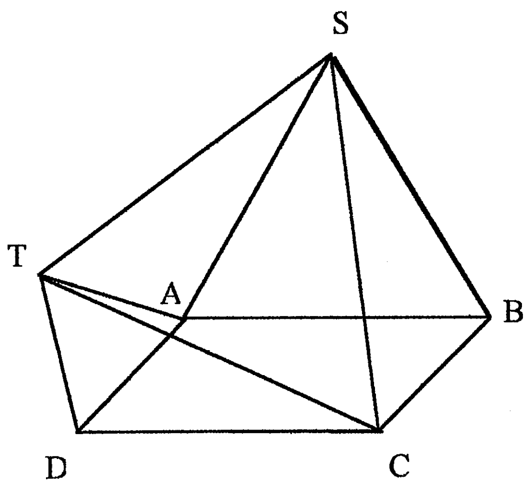
Les problèmes de géométrie considérés ici sont ceux formulés pour que l'espace de référence soit explicitement l'espace géométrique, ce qui signifie en particulier, qu'aucun dessin n'est fourni dans l'énoncé. Par exemple :

> Soit ABCD un parallélogramme. ASB et ATD sont deux triangles équilatéraux situés à l'extérieur du parallélogramme. Démontrer que le triangle STC est un triangle équilatéral.

Les objets du problème sont les objets de la géométrie. La résolution attendue doit procéder d'une argumentation, la problématique installée est la problématique géométrique.
Etudions le fonctionnement de l'expert.

1. Point de vue de l'expert : conversion et traitement

L'expert peut faire intervenir le dessin pour avoir une représentation imagée du problème, mieux cerner les relations géométriques mentionnées dans l'énoncé, mieux cerner le sujet de l'argumentation à fournir, ...
Il opère un premier processus consistant à construire une autre représentation du problème, dans un autre registre, celui des dessins de géométrie.
Par exemple, pour le problème cité, voici le dessin que nous avons choisi de produire :



En reprenant la typologie élaborée par R. Duval[10], nous pouvons parler pour l'expert d'une activité de conversion.

> « [Elle] consiste à transformer une représentation produite en changeant de système de représentation pour pouvoir utiliser les possibilités spécifiques d'explication ou de traitement du nouveau système. Convertir une représentation c'est passer d'une représentation produite dans un système à une autre représentation produite dans un autre système en conservant le renvoi à l'objet représenté. La difficulté de l'activité de conversion tient d'une part à ce que ce changement entraîne un changement du contenu de la représentation [...], et d'autre part à ce que ce changement ne relève pas d'un traitement comme dans une activité de simple codage. » (p52)

La conversion ici se fait entre le registre de la langue naturelle, et le registre des dessins en géométrie. **Le dessin assure un rôle d'aide à la "représentation du problème"** (au sens de J. Julo[11] : interactions de trois processus : sélection des informations, structuration, opérationnalisation).
Or souvent cette aide est déjà prise en charge dans les manuels, ou par le maître qui propose les exercices. R. Duval ajoute :

> « On peut remarquer dans les outils pédagogiques proposés aux élèves (manuels, fiches ...) un appel croissant à l'activité de conversion par la présentation simultanée, pour un même objet, une même situation, de représentations relevant de registres différents. Comme si la conversion était toujours une activité spontanée ou naturelle et comme si les élèves feraient d'eux-mêmes le lien entre ces différentes présentations ! » (p53)

Les conséquences de ces présentations simultanées ne sont pas anodines : nous l'avons vu, ces représentations différentes définissent des cadres de travail différents, et induisent des rapports différents aux objets du problème. Par exemple la présence d'un dessin pour accompagner un énoncé, ayant plus ou moins en charge certaines informations de l'énoncé, pose de fait la référence du problème au niveau de l'espace sensible.
D'où les difficultés pour les élèves de savoir dans quel espace de travail se situe le problème, dans quel espace de travail il est licite de situer la résolution du problème et sa validation.

D'autre part convertir pour quoi faire ?

---

[10] DUVAL R. (1999) *Conversion et articulation des représentations analogiques,* Séminaires de recherche n°1, IUFM Nord-Pas-de-Calais.

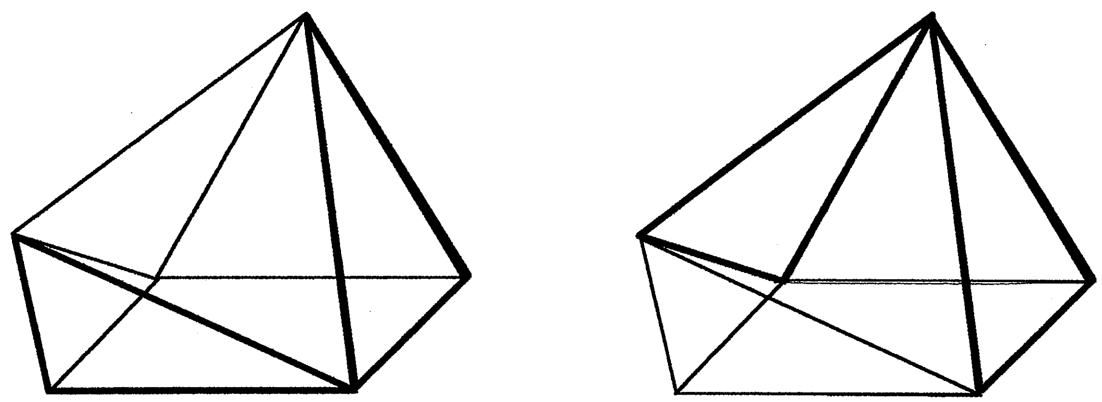
[11] JULO J. (1994) *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques,* Presses Universitaires de Rennes.

Pour résoudre le problème évidemment, puisque telle est la tâche qui nous préoccupe. Mais la résolution passe encore par différentes phases dont celle qui aura pour support le dessin. A ce moment **le dessin assure un rôle d'aide à la "résolution du problème"**. Pour « mieux voir » les relations, propriétés, objets qui vont servir à la résolution dans le cadre géométrique, c'est à dire à la démonstration. Objets dans un premier temps spatiaux car considérés sur le dessin, mais traduits par l'expert en objets géométriques. C'est la fonction heuristique des dessins.

Cette activité dépend de l'individu qui résout, et en particulier de ses connaissances géométriques. Pour l'exemple cité, l'expert peut être plus ou moins familier de l'usage des cas d'isométrie des triangles, ou des transformations, et « verra » le dessin différemment suivant les habitudes qu'il en a et les connaissances qu'il fait fonctionner régulièrement.

Les dessins suivants par exemple permettent de visualiser les triangles qui nous ont aidés à avoir une intuition, à chercher et à bâtir une démonstration utilisant les égalités d'angles et le cas d'isométrie « deux triangles ayant deux côtés de même longueur et l'angle qu'ils forment de même mesure, sont identiques. »[12]

Sur la figure de gauche ci-dessous, l'isométrie des deux triangles en gras se voit à partir des données et du théorème cité. Sur la figure de droite, il faut faire un calcul d'angle, pour l'usage de ce même théorème. Mais l'isométrie des triangles en gras de la figure de droite fait aussi apparaître le triangle STC isocèle en S avec un angle au sommet de 60° et donnerait à penser l'usage d'une rotation de centre S et d'angle 60°.



Par ailleurs le fait que les triangles ASB et ATD soient situés à l'extérieur du parallélogramme assure à l'expert l'existence d'un seul cas de figure ; il peut donc se fier aux propriétés visuelles de la figure pour le calcul sur les angles ou le sens des rotations.

[12] En annexe 1, quelques démonstrations sont proposées : une utilisant les cas d'égalité des triangles, et deux autres utilisant des transformations.

Quelle que soit la méthode que l'expert utilise, les actions, les transformations réalisées sur ces dessins, en particulier, la reconfiguration, l'usage des transformations, la décomposition en sous-figures, l'inclusion dans des sur-figures, ... sont des exemples de « manipulations » des dessins en géométrie qui constituent une activité cognitive distincte de l'activité de conversion, et appelée dans la typologie de R. Duval activité de traitement.

> « Le traitement d'une représentation est la transformation de cette représentation dans le registre même où elle a été formée. Le traitement est une transformation interne à un registre. »[13]

Ajoutons le cas des problèmes de géométrie où il faut considérer plusieurs cas de figures. Par exemple pour le problème suivant :

> On considère quatre points situés chacun sur un des quatre côtés d'un rectangle (et différents des sommets du rectangle). Quand on relie ces quatre points, on obtient un quadrilatère. Le problème est de comparer l'aire de ce quadrilatère, et l'aire de l'ensemble des quatre parties qui entourent le quadrilatère à l'intérieur du rectangle.

L'expert prend en compte les particularités des figures qu'il fait pour se représenter le problème, particularités qui interviennent dans la solution, et lui permettent de déterminer les différents cas à traiter[14].

En résumé, l'expert effectue à la fois un traitement figural et un traitement géométrique. Il travaille toujours en interaction sur les deux plans : celui de la géométrie et celui du dessin, avec des allers-retours entre les deux. Il garde le contrôle et la maîtrise des règles du jeu de ces interactions.

Après avoir repéré l'intervention du spatial dans ces deux activités fondamentales, conversion et traitement, pour l'usage par l'expert des dessins en géométrie, nous allons en tirer quelques conséquences et hypothèses pour le travail en classe avec des élèves qui ne sont pas des experts en géométrie.

2. Remarques et questions à dégager pour la réflexion didactique

---

[13] DUVAL R.(1993) *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée,* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol 5, Université Louis Pasteur, IREM de Strasbourg, p37-65.

[14] En annexe 2, nous proposons une résolution du problème cité, où les différents cas de figures traités sont issus d'un travail sur les figures.

a) La confrontation à un problème de géométrie

Pour les élèves de l'école élémentaire existe-t-il des problèmes de géométrie ?
C'est en effet une première rupture avec le travail de l'expert envisagé précédemment. L'élève en général n'est pas confronté à des problèmes de géométrie. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe I. de ce chapitre, il est en général confronté à des problèmes spatio-graphiques, ou à des problèmes de type géométrique mais pour lesquels le domaine des objets à considérer est ambigu du fait de la présence des dessins.
Il faut donc repositionner le problème. Quel est brièvement l'objectif de travail avec les élèves dans le domaine de la géométrie ? Développer des connaissances de géométrie, être capables de les faire fonctionner pour résoudre des problèmes, comprendre ce qu'est la problématique géométrique, et pouvoir en faire fonctionner les règles.
Il semble que par rapport à ces objectifs, nous puissions élargir le champ des situations proposées aux élèves, tout en gardant les objectifs définis.
Nous distinguerons trois types de situations qui paraissent intéressantes à développer :

- **Des problèmes dans l'espace sensible à traiter géométriquement**

(c'est l'objet du paragraphe III)

- **Des situations de travail dans l'environnement graphique, autour de phénomènes géométriques.**

- **Des problèmes de géométrie formulés sans dessin pour lesquels la recherche nécessite un travail dans l'environnement graphique.**

Précisons ce que nous entendons par « phénomène de géométrie » : c'est une propriété, une régularité, liée à certaines configurations géométriques, telle que quels que soient les dessins utilisés, en termes de taille, d'orientation, ... elle sera toujours perceptible, moyennant une certaine marge d'incertitude, et sous couvert d'une certaine attention à la précision des tracés.
Par exemple :

- les droites concourantes dans un triangle
- les configurations où interviennent la propriété des milieux dans un triangle (ex : « Le quadrilatère formé par les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque est toujours un parallélogramme »).
- des configurations particulières (ex : le problème cité dans le paragraphe 1 ; la droite d'Euler, ...)
- les propriétés caractéristiques des quadrilatères ...

Revenons sur la comparaison entre le travail de l'expert et le travail de l'élève, d'une façon générale.

b) Le dessin assure une fonction d'objectivation pour l'expert

> « L'objectivation est la fonction qui permet à un sujet « de prendre conscience de ce dont jusqu'alors il n'avait pas eu conscience et de ce dont il ne peut avoir encore une conscience claire tant qu'un travail d'extériorisation [...] n'est pas encore accompli. »[15]
> Il s'agit d'une production qui est pour soi et non pour autrui. D'une certaine manière l'objectivation correspond à un usage strictement privé d'un registre de représentation, même si la production en est matériellement accessible à autrui et peut ressembler à une production faite à des fins de communication ou parfois de traitement ... » (Duval 1999)

Des choix sont donc opérés par l'expert pour le dessin qu'il produit pour (se) représenter le problème. Les connaissances de l'expert lui permettent de maîtriser la cohérence et la pertinence de ses choix par rapport au problème.

Pour les élèves, travaille-t-on sur ce rapport aux dessins ? En général, non.
Développer auprès des élèves la fonction d'objectivation des dessins pour la résolution de problèmes géométriques peut alors être une piste de travail.

c) La conversion est à l'initiative de l'expert, et il en connaît les modalités

Citons quelques unes des plus importantes de ces modalités :

- L'articulation délicate entre propriétés géométriques, propriétés visuelles, propriétés spatiales du dessin, est connue par l'expert. Il sait que certaines de ces dernières traduisent des propriétés géométriques et d'autres non ; et ses connaissances sont suffisamment développées pour lui permettre de les repérer.

- Le dessin est une image particulière, alors que le résultat visé a un caractère de généralité. Les connaissances de l'expert sont suffisantes pour effectuer cette transition entre cas particulier et cas général.

---

[15] DUVAL R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*, Ed. Peter Lang, p90.

- Le contrat de la problématique géométrique est clairement identifié par l'expert, la résolution s'exprime en termes d'un discours, ordonné et structuré selon certaines règles, connues de l'expert.

Questions (ouvertes) pour les apprentissages des élèves :
Quelle articulation travaille-t-on à l'école élémentaire pour explicitement distinguer propriétés visuelles (et spatiales) et propriétés géométriques attachées à un dessin ?
Quelle articulation travaille-t-on sur cas particulier et cas général ?
Quelle clarification de la problématique géométrique ? Quelles situations pour entrer dans une problématique géométrique ?

Etudions maintenant quelques pistes de travail appuyées sur des situations didactiques.

3. Exemples de situations pour diverses fonctions de l'environnement graphique

Nous allons étudier dans ce paragraphe, à partir d'un exemple générique et d'un autre plus classique, comment l'environnement graphique peut servir d'espace de travail pour appréhender des phénomènes de géométrie et entrer dans une problématique géométrique.

a) L'environnement graphique, pour l'entrée dans une problématique géométrique

L'exemple générique considéré est « la situation des médiatrices » proposée par G. Brousseau[16] et analysée par S&B en détail[17], bien que rarement expérimentée en classe. Mais c'est l'aspect métaphorique de la situation qui nous intéresse ici, de façon à extraire des outils d'analyse pour penser les situations didactiques.

La situation peut être résumée ainsi :
Les élèves construisent les médiatrices d'un triangle.
Ils observent que ces droites sont ou non concourantes, suivant les dessins obtenus dans la classe. Le maître demande aux élèves de refaire des constructions de sorte que le petit triangle formé par les points de concours des médiatrices soit le plus grand possible.

---

[16] BROUSSEAU G. (1983) *Etudes de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie*, Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, LSD IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1982-1983.

[17] P133-149, cf. les paragraphes « Introduire à la géométrie : la situation des médiatrices » et « Conclusions ».

Le problème est donné dans l'environnement papier crayon, c'est un problème spatio-graphique. On demande aux élèves de réaliser des constructions, de visualiser, d'observer, les objets qu'ils construisent. Dans cette expérience, la réalité résiste à l'obtention du résultat recherché. Il est difficile, très difficile, d'obtenir un (très) grand triangle ; parfois même on n'obtient pas de triangle du tout.

Les remarques et commentaires de S&B[18] nous paraissent pertinents de sorte que nous les reproduisons en partie. Cependant afin de cerner le caractère général de ces analyses, nous nous permettons d'indiquer entre crochets quelques précisions ou généralisations qui ne paraissent pas abusives et de changer le titre des trois aspects qu'ils ont dégagés (et d'ajouter du caractère gras ; le souligné et l'italique, c'est par S&B).

- **L'espace graphique comme un laboratoire de recherche, où l'on tient compte de la réalité de cet espace.**

> « C'est d'abord un regard neuf sur l'espace [graphique], un regard où l'on laisse exister, ou plutôt où l'on force, par l'artifice didactique, l'existence de **l'étonnement de voir** trois droites se couper en un seul point [ou tout autre phénomène géométrique]...

Dans ce regard, se manifeste à la fois une continuité avec l'espace de travail habituel, au travers des expérimentations faites (« le respect de la réalité ») et à la fois une rupture avec cet environnement dans la mesure où là, cette habitude ne permet pas de conclure ; l'expérience résiste.

- **L'espace graphique comme un laboratoire de recherche, où s'affirment des propriétés géométriques, et où peuvent naître des questions de géométrie**

> « On a mené aussi loin que possible l'enquête spatiale ; le résultat en est que s'il y a trois points, ils sont très proches, *comme* s'il n'y avait qu'un point. Le problème <u>spatial est résolu,</u> *du moins sur la feuille de papier* : on peut faire comme s'il n'y avait qu'un point [On peut admettre la propriété] ...
> On n'est pas parvenu à agrandir ce triangle, alors on change de préoccupation, on cherche une explication, on conjecture certes que les trois points peuvent être confondus en un, mais surtout qu'il y a **une contrainte de nécessité dans cette propriété, et on la cherche non plus avec les outils matériels, mais au niveau des savoirs.**

[18] p144-145, les trois citations suivantes sont extraites de ces deux pages.

La question du « pourquoi » est d'autant plus facile et naturelle que la situation aura mis en scène une frustration importante au niveau de la réalité. »

On admet finalement cette propriété ; elle va venir s'intégrer au corpus des connaissances de géométrie. L'intégration, l'acceptation, la mémorisation, par les élèves, s'appuiera sur une expérience spatiale effective qui, même si elle n'explique pas pourquoi c'est comme ça, aura fait vivre ce phénomène géométrique.
D'autre part on saura que les pistes pour répondre au pourquoi ne sont plus à chercher dans l'environnement graphique, avec les dessins, et les moyens de la perception. Ceci assure en partie que l'on entre alors en rapport avec d'autres moyens : « les savoirs » de géométrie.
Ces nouveaux moyens relevant des connaissances de géométrie, on perçoit un début d'entrée dans la problématique géométrique.

- **Cohérence assumée entre les déclarations retenues pour vraies dans l'espace graphique, et dans l'espace géométrique**

« La situation laisse exister l'énoncé vraisemblable de l'élève : et bien « il y a trois points qui sont équidistants de trois autres, quoi d'étonnant ? » [ou plus généralement la non confirmation d'une propriété géométrique dans le cadre spatial].
C'est là encore qu'intervient le professeur de mathématiques. Cette déclaration déduite des procédés de constructions, est une <u>déclaration de plus qui peut prendre place dans le modèle</u> [de l'environnement graphique], mais <u>c'est une déclaration fausse de la théorie</u>. Le souci de cohérence entre l'ensemble des déclarations des différents modèles est bien à la racine de la géométrie, comme des mathématiques. N'est-ce pas ce souci de cohérence théorique en géométrie ... qui manquait aux civilisations comme celle des égyptiens, dont les œuvres prouvent amplement qu'ils maîtrisaient la modélisation ? C'est là **qu'il y a rupture culturelle entre la modélisation de l'espace [graphique], et la théorisation de la géométrie**.
Notons que la situation permet d'illustrer que la cohérence n'est pas le produit naturel d'une situation de modélisation, que l'importance essentielle de ce souci de cohérence ne pourra être prise en compte que sous l'action du professeur. **C'est le débat mathématique qui conditionne l'existence des situations de géométrie, situations où la cohérence est la règle principale qui régit l'acceptation ou le refus des déclarations**. La géométrie viendra alors effectivement structurer les connaissances spatiales des élèves. »

Voilà qui est clair.

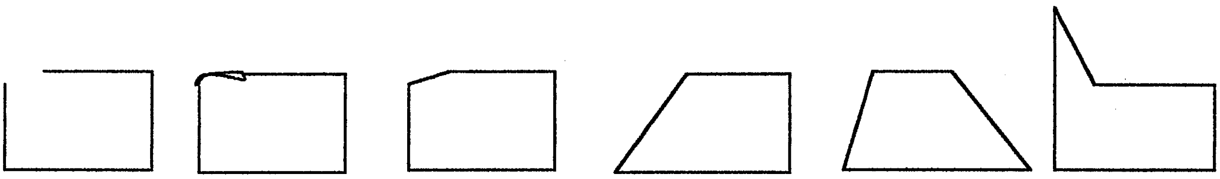
A la fois pour mieux cerner les aspects mis en évidence précédemment, mais aussi pour regarder un autre exemple pour l'école élémentaire, nous allons reprendre dans le paragraphe suivant une situation proposée par H-C. Argaud dans sa thèse[19], permettant de bien comprendre, nous semble-t-il, le rôle de l'environnement graphique pour travailler des propriétés géométriques.

b) L'environnement graphique pour l'apprentissage de propriétés géométriques

La situation proposée à des élèves de CM2 est la suivante :

Construire, si c'est possible, un quadrilatère vérifiant la propriété : il a trois angles droits.

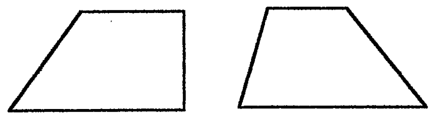
Les élèves essaient d'obtenir un résultat à la construction. Ils produisent des pentagones avec trois angles droits, des « rectangles avec un coin arrondi », des « rectangles avec un coin ouvert », ou des trapèzes (non réguliers) en codant trois angles droits ...



Dans le déroulement de la séance, chaque groupe d'élèves (ils sont par deux) vient exposer son travail au tableau.
Ou bien il n'y a pas d'argument produit par les élèves pour invalider une production. Certains ont compris « construis, si possible un quadrilatère, avec trois angles droits ». Le changement de position de virgule change en effet le sens de la recherche.
Ou bien les arguments de quelques élèves se réfèrent aux quatre côtés d'un quadrilatère ; aux côtés tous rectilignes ; au nombre d'angles droits, à la vérification à l'équerre des angles droits, mais sans emporter la conviction de l'ensemble, sans que tout cela ne soit finalement bien clair.
Le maître n'intervient jamais pour valider, apporter un argument, dire qu'une proposition d'élève est vraie ou fausse, il laisse le débat se mener entre les élèves, l'interrompt parfois, mais ne le relance jamais.
Citons la fin de la séance :

> « Le maître fait faire alors un essai de synthèse collectif sur les productions qui sont toutes exposées au tableau.
> Le maître : *quels sont les groupes qui ont construit un quadrilatère ?*
> Les élèves se mettent d'accord pour dire qu'il y en a deux.

[19] Op.cit P300-312



Le maître : *parmi ces deux, lequel vérifie la propriété ?*

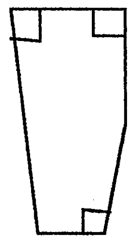
Mehdi : *celui-là n'a pas d'angle droit, celui-ci n'en a que deux.*

Léa : *c'est obligé de faire un quadrilatère ... c'est un peu impossible de faire un quadrilatère avec trois angles droits parce que si on fait déjà avec deux, puis avec trois, le quatrième sera droit.*

Lucas : *on sera obligé de faire cinq traits avec trois angles droits !*

Riad dessine :

(le pentagone ci-contre)



Il vérifie les angles des quatre sommets. « *Je pense que si on met les traits droits* (ceux de la partie verticale droite du dessin), *au lieu que ce soit comme ça* ——— *c'est droit.* »

Mehdi : *Je pense qu'on ne peut pas faire quatre côtés et trois angles droits.*

Peu d'élèves participent au débat. Toutes ces interventions ne sont pas reprises par les autres, ce qui fait que nous considérons que la conclusion n'est pas établie, bien que ces élèves aient donné des arguments corrects.

Dans la même journée, l'après-midi, le problème est à nouveau proposé aux élèves mais sous une autre forme :

Paul dit « on peut construire un quadrilatère qui a trois angles droits »

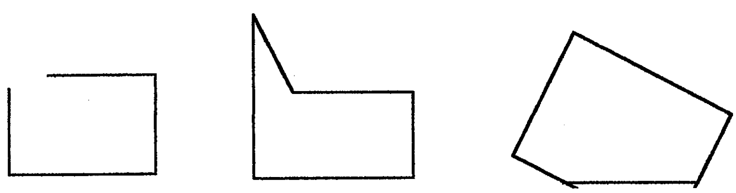
Marc dit « On ne peut pas ! ».

Qui a raison ?

Si tu penses que c'est Paul, fais la construction !

Si tu penses que c'est Marc, explique pourquoi.

23 élèves déclarent que Marc a raison, et 3 élèves que Paul a raison. Les constructions accompagnant le fait que Paul a raison sont :



Les arguments pour les 23 élèves sont de trois types :

- S'il y a trois angles droits il faut cinq côtés (dans 8 productions)

- S'il y a trois angles droits, il y en a quatre (15 fois)

Les arguments précédents quand ils sont bien explicites mentionnent qu'un quadrilatère a quatre côtés.

- Un quadrilatère ne peut avoir que des segments rectilignes (5 fois)

H-C. Argaud invoque entre autres *le type de problème* comme élément pour expliquer les différences de réponses des élèves au premier et au deuxième problème ; nous reprenons cet élément mais en le formulant dans un vocabulaire emprunté à S&B, qui nous paraît plus adapté :

Le problème est spatio-graphique dans le premier cas, il s'agit de produire un dessin, il se présente comme un problème de construction. Il est donc justifié que les élèves entrent dans une problématique pratique. Et de fait, même si des arguments corrects sont proposés pour valider les propositions, la validation empirique s'impose de par la prégnance de cette problématique.

Par contre le second problème est un problème « de géométrie » ou plutôt pour entrer dans une problématique géométrique. Les objets du problème sont toujours les dessins, les objets spatio-graphiques ; ils sont évoqués, mais la tâche de l'élève porte sur une argumentation. Et l'argumentation va faire intervenir des connaissances de géométrie, avec le cadre graphique pour illustrer, expliquer, ... en donnant des exemples ou des contre-exemples. « Le dessin change de statut ». Il n'est plus l'objet du travail, mais utilisé comme outil d'argumentation, pour illustrer, expliquer, une connaissance, un savoir de type géométrique.

C'est le même principe que la situation des médiatrices, dans le sens où l'environnement graphique sert à faire une expérience (des essais) qui par rapport à un problème ne permet pas forcément de décider, choisir ... mais *fait vivre* une question de type géométrique.

Expérience sur laquelle s'appuie un second moment, où il y a un changement du rapport au problème, parce que le problème n'est plus le même, il devient un problème de recherche d'argumentation, d'explication, de confirmation d'une conjecture ...

> « La situation organisée autour du second problème semble être a-didactique, pour une raison liée à la situation organisée autour du premier problème. Nous pensons en effet que le fonctionnement a-didactique de la seconde situation résulte du milieu constitué, qui est, selon nous toute l'expérience spatio-géométrique acquise lors de la résolution du premier problème : les informations spatiales et géométriques constituées et accumulées lors de la résolution du premier problème constituent le milieu pour la validation de la réponse au second. » (H-C. Argaud p312)

Le théorème « Dans un quadrilatère, s'il y a trois angles droits, il y en a quatre, et c'est alors un rectangle » est déjà constitué pour certains élèves et fonctionne comme un théorème en acte. Il ne s'impose pas dans le premier problème puisque celui-ci pose l'espace sensible comme espace de référence (pour la résolution et la validation) ; par contre, il peut surgir de façon cohérente dans le second problème ; même pour les élèves qui ne l'avaient pas construit préalablement implicitement[20].

D'une façon plus générale, les recherches dans l'espace graphique concernant des propriétés géométriques de quadrilatères peuvent être une piste de travail fonctionnant sur les mêmes principes que ceux sous-jacents à la situation des médiatrices ou à celle des trois angles droits des quadrilatères.
Ce sont des pistes pour faire entrer les élèves dans une problématique géométrique.
A ce propos S&B mentionnent une question posée par un élève lors d'une situation de construction d'un rectangle dans la cour de récréation : « Peut-être qu'il existe des quadrilatères qui ont quatre angles droits et qui ne sont pas des rectangles ! ».
S&B notent à propos de cette remarque :

> « Une recherche aurait alors pu être lancée dans le « laboratoire » de la feuille, pour obtenir des quadrilatères non rectangles ayant quatre angles droits ... recherche débouchant sur un échec. La traduction de cet échec en termes de propriétés caractéristiques du rectangle appuie celles-ci sur une conviction empirique, leur confère « naturellement » un statut de théorème en acte. » (p146)

Dans le cadre du travail à l'école élémentaire, ces théorèmes en actes peuvent être admis comme des propriétés géométriques. Le positionnement relatif aux problèmes d'argumentation, pour des problèmes plus complexes que ceux cités, relève plutôt d'un travail au niveau du collège.

4. Conclusion

Suite aux paragraphes précédents, émerge une hypothèse : **on ne peut pas construire l'entrée dans une problématique géométrique *contre* la prise en compte du caractère spatial des problèmes ou des objets sur lesquels on travaille.** Il faut faire avec.
On ne peut donc plus opposer comme cela s'entend habituellement, géométrie des tracés (appelée aussi perceptive, expérimentale ...), pour laquelle les objets sont des dessins, les

---

[20] Cette progression dans les étapes du travail illustre bien ce que peut être l'articulation d'une situation objective, d'une situation de référence et d'une situation d'apprentissage, emboîtées l'une dans l'autre.

actions sont spatiales et effectives, les modes de validation sont empiriques, à la géométrie déductive. Cela n'a pas de sens compte tenu de la problématique « des figures en géométrie » que nous venons d'exposer.

Malgré la difficulté d'existence d'une problématique géométrique à l'école élémentaire et au début du collège, une ouverture est possible dès le cycle 3 en développant :

- **Des situations où l'environnement graphique sert à expérimenter, observer, tester, mettre en évidence des phénomènes géométriques, et apprendre les propriétés géométriques sous-jacentes.**

- **Des situations où l'environnement graphique sert comme intermédiaire dans la modélisation de problèmes posés dans l'espace sensible, pour une résolution géométrique.**

- **Des situations où l'environnement graphique sert à schématiser des problèmes de géométrie, et où se fait la dévolution des questions sous-jacentes à la schématisation.** (ce dernier point relevant plutôt du collège)

Le second point est l'objet du paragraphe suivant.

III. De l'usage des dessins dans une problématique de modélisation

Rappelons brièvement ce qui caractérise la problématique de modélisation

> « L'espace de référence dont il est question est bien l'espace sensible, [...] la solution doit pouvoir être validée dans l'espace sensible. Par contre [...] la solution d'un problème par modélisation est construite complètement dans le système symbolique du modèle selon la dynamique de ce modèle. » (S&B p50)

Partant du principe que le géométrique est un outil de modélisation de tels problèmes, et dans la mesure où le géométrique s'incarne et se traite (au niveau où nous nous plaçons) dans l'espace graphique, quelles sont les fonctions du dessin dans la modélisation ? Quelles questions pose la modélisation par un dessin ? Quel genre de dessin construit-on dans la modélisation ? Quelle prise en charge par l'enseignement ? ...

Nous allons voir dans ce paragraphe que **la modélisation en géométrie amène souvent à considérer un problème spatial comme un problème spatio-graphique**.
Dans une problématique de modélisation on va traduire des propriétés spatiales, en propriétés spatio-graphiques (visuelles et spatiales) dans le but de les analyser en termes de propriétés géométriques. Le dessin devient un outil, on comprend le sens qu'il a, on tente de maîtriser son usage.

1. Choix d'un cadre de modélisation, conversion et traitement

Face à un problème spatial, si la problématique pratique tombe en défaut (on ne peut le résoudre de façon pragmatique et directe), l'expert va le modéliser, le transformer en un autre problème dans un modèle qui aura ses propres règles ...
L'expert choisit un modèle adapté au problème, et dans un cadre qu'il sait maîtriser. Le modèle choisi dépend des connaissances du sujet, et procède d'un choix. Les modèles sont nombreux en sciences, et il n'est pas certain que, confronté à tel problème, le modèle de la géométrie euclidienne soit pertinent, ... un modèle relevant d'une autre géométrie, ou des modèles physiques, pourraient être mieux adaptés ...
Bien sûr nous allons rester ici attachée à des problèmes pour lesquels la géométrie euclidienne est bien pertinente pour résoudre. Mais il fallait signaler qu'il y un choix du modèle qui préside à la modélisation.

Choisir le modèle de la géométrie, c'est savoir que *des connaissances de géométrie peuvent être utiles pour résoudre des problèmes spatiaux*, et maîtriser ces connaissances pour les faire fonctionner.
Cette question ne se posait pas dans le paragraphe II. précédent, pour lequel l'espace de travail référait déjà à la géométrie. Or ici ce n'est plus le cas. Cela signifie que d'autres types de connaissances vont être en jeu, en particulier celle citée précédemment.

Les remarques précédentes, déjà faites dans un cadre général (chapitre 1) sont caractérisées ici par la spécificité de l'outil qui permet d'accéder au modèle. **Cet outil est l'environnement graphique, et les objets géométriques du modèle sont spécifiés au travers des objets spatio-graphiques.**

Mentionnons, malgré la redondance, les aspects importants d'un point de vue didactique :
l'activité de conversion et de traitement à la fois figural et géométrique, met en jeu de façon dialectique des changements de cadres : le spatial, le spatio-graphique et le géométrique, dont il faut contrôler les différentes articulations. L'expert le fait, l'élève non.

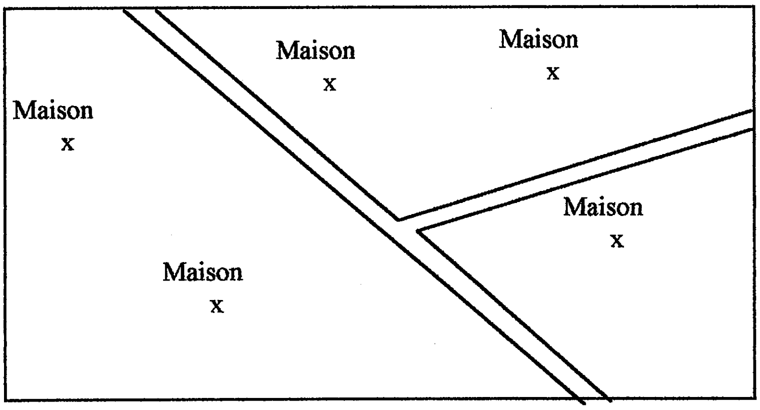
2. Aspects fondamentaux des changements de cadre pour la modélisation

En premier lieu, le dessin qui servira à représenter le problème, est fonction de la résolution même du problème, de l'objectif de travail. Il préfigure déjà le type d'objets géométriques que l'on veut mettre en œuvre. Par exemple pour déterminer un plan de section sur un objet de l'espace, il pourra être adapté de travailler avec une représentation en perspective de l'objet, ou bien avec un patron de l'objet. Cela dépend des propriétés des dessins, de leur mode de production, et de ce que l'on veut en faire.
D'autre part si le problème spatial s'inscrit dans un travail architectural, technologique, ou ... les dessins pertinents utilisés dans les modélisations ne seront pas de même nature.
Plan de coupe, vues en dessin technique, plans, dessins géométriques, représentations planes de solides en perspective, patrons de solides, schémas, ...

De ce point de vue, il semblerait d'ailleurs qu'il faille distinguer les problèmes concernant les objets (sections, représentations, coupes, constructions, ...), des problèmes concernant des lieux, déplacements ou orientations dans des lieux de l'espace sensible (régionnement, positionnement, parcours, ...). Dans le chapitre suivant, une partie du premier point est développée. Prenons ici un exemple pour le second.

Le problème de régionnement suivant (problème « industrialisation »[21]) est déjà proposé aux élèves dans le cadre spatio-graphique, une partie de la modélisation du problème spatial initial est réalisée :

> Une entreprise envisage de créer une usine à la campagne. Voici, ci-contre, le plan de la région qui a été choisie. On ne peut installer l'usine à moins de 600 m d'une maison et on ne veut pas l'installer à plus de 250 m d'une route. Trouver tous les endroits où l'on peut envisager d'installer cette usine.



1 cm : 200 m

Dans la production du dessin, intermédiaire entre problème spatial et problème que l'on va résoudre géométriquement, des choix tout à fait particuliers sont déjà faits pour la modélisation :

- Certaines propriétés spatiales sont ignorées (les épaisseurs, la largeur des trottoirs, les éléments qui empêcheraient d'aller mesurer entre deux maisons en ligne droite, ...)
- Des schématisations sont faites (représenter les maisons par des points ...)
- Des indications de mesures sont fournies, une échelle, c'est à dire le lien de proportionnalité entre les mesures dans l'espace réel et les mesures des dimensions du dessin

Ces choix se justifient par rapport à l'objectif recherché, qui est de déterminer un domaine, une région de l'espace sensible que l'on peut lire comme région du plan sur le dessin, et les approximations se justifient compte tenu des tailles des objets lieux et espaces considérés[22].

---

[21] Cité dans : APMEP *Aides pédagogiques pour le cycle moyen, Elem-Math IX, Situations Problèmes,* Publication APMEP, n°64. et DUBOIS C., FENICHEL M., PAUVERT M. (1993) *Se former pur enseigner les mathématiques,* tome 1, Problèmes - géométrie, Ed. A.Colin, p45 et p53.

Il est rare que des contenus d'enseignement portent explicitement sur ces aspects fondamentaux de la modélisation.

A propos des mesures, elles peuvent être proportionnelles (un plan à l'échelle) ; ou bien reportées sur un schéma sans souci de proportionnalité, ou bien même absentes si elles ne servent pas à la résolution du problème. Cette problématique n'apparaît jamais dans les problèmes posés aux élèves, puisque ceux-ci présentent déjà des dessins où la question est résolue.
Une citation de L&C pour appuyer ce constat d'absence de prise en compte dans l'enseignement de la nécessité et de l'acceptation des approximations, marges de tolérance, à définir pour les mesures considérées, ...

> « Dans une approche de modélisation, le problème des erreurs de mesures est le même quelles que soient les mesures, **dans l'enseignement au contraire, le choix didactique consiste à apprêter le réel pour empêcher l'élève de se poser la question du caractère approché des mesures** [...]. » (p181-182)

En fait, ce n'est pas tant « le réel » qui est apprêté que l'outil ayant servi à le représenter, les dessins issus de la modélisation.

3. Conclusion

L'absence de problématique de modélisation se caractérise entre autres par la prise en charge, dans l'énoncé d'un problème spatial évoqué, de sa conversion en problème spatio-graphique, et géométrique.
Cette conversion réalisée par autrui, et antérieurement au problème posé à l'élève, n'est pas naturelle. Les choix faits dans la constitution du dessin ne sont pas naturels ... Il faut comprendre que le dessin ne va retenir que les relations nécessaires et suffisantes pour la résolution, à savoir certaines des relations topologiques et métriques, et mettre en jeu bien d'autres propriétés et connaissances à maîtriser, par exemple l'usage des échelles, des mesures, ...

---

[22] On pourra noter la similitude entre ce problème et « la chasse au trésor » présentée dans le chapitre 1, III. L'étude des rapports des élèves au milieu dans ce cas, la réflexion autour du rapport effectif, rapport évoqué, et les autres questions de structuration du milieu, liées directement à notre problématique d'articulation du spatial et du géométrique, figurent dans la quatrième partie, dans le cadre de l'étude de la situation de modélisation « Terrain et tige ».

Comme nous l'avons vu pour les problèmes de géométrie, le constat de l'inexistence d'un travail où la conversion est laissée à l'initiative des élèves, sous couvert d'un travail avec l'enseignant, est très fréquent ; encore plus fréquent dans le cas des problèmes spatiaux, pour lesquels les conditions matérielles et environnementales sont souvent incompatibles avec les contraintes du fonctionnement scolaire (matérielles, de sécurité, ...).

IV. Conclusion

Un dessin n'est pas géométrique en soi, et le point de vue du lecteur n'est pas naturellement géométrique : il est construit, en tant que discours.
Dans la mesure où les élèves se placent en général, et de façon naturelle, dans un rapport pratique aux dessins, c'est le rapport à ce discours et non aux dessins qui peut être sujet d'une évolution dans le processus didactique. Or paradoxalement, le rapport au discours se construit dans le rapport aux dessins. Pour ne pas rester piégé dans cette pseudo contradiction, il est nécessaire de considérer différents rôles de l'environnement graphique :

- **l'environnement graphique comme un outil d'aide à la représentation et la modélisation de problèmes géométriques ou spatiaux ;**

- **l'environnement graphique comme un lieu d'étude, champ, domaine, espace de phénomènes dont les phénomènes géométriques.**

Et pour chacun de ces rôles, deux aspects sont importants à dissocier : le « pour quoi faire ? » et le « qu'est-ce qu'on y fait ? ». L'outil : pour se représenter, schématiser, mémoriser, ... modéliser un problème ; on y fait des dessins, et on travaille sur ces dessins. Le lieu d'étude : pour observer ; on y fait des constats, des hypothèses, peut-être d'autres dessins, ... et on travaille sur ces dessins.

Ces distinctions sont importantes pour mieux cerner les questions didactiques alors ouvertes :

- Pour l'environnement graphique en tant qu'outil, quels problèmes géométriques ou spatiaux proposer aux élèves de l'école élémentaire ? Comment gérer pour le maître les activités de conversion et de traitement au cœur de l'activité effective de résolution ? Comment articuler les objectifs déclarés de ces situations, portant sur la résolution de problème, et les connaissances sous-jacentes en jeu pouvant être connues ou non des élèves ?

- Pour l'environnement graphique comme lieu d'étude, quels phénomènes peut-on observer à l'école élémentaire, pour quelles notions géométriques ? Comment s'effectue le lien entre observations et institutionnalisation des connaissances visées, objectifs d'apprentissage portant directement sur les propriétés géométriques observées ?

Nous ne prétendons pas répondre à ces questions mais espérons avoir clarifié leur signification en tant que questions de recherche, pour approfondir la réflexion sur le rôle de l'environnement graphique dans l'apprentissage de la géométrie à l'école élémentaire.
Quelques éléments de résonance à ces questions pourront être entrevus au cours des parties suivantes : l'étude de la symétrie axiale proposée dans le chapitre 3C fournit un exemple pour « environnement graphique : lieu d'étude de propriétés géométriques » ; l'étude sur la situation « Terrain et tige », proposée dans la quatrième partie, fournit un exemple pour « environnement graphique : outil pour la modélisation ».

Dans le chapitre suivant, nous reprenons la problématique du traitement des images dans l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire, dans le cas des objets de l'espace sensible.

CHAPITRE 2B

REPRÉSENTATIONS PLANES D'OBJETS DE L'ESPACE

Les représentations planes de solides[1] jouent un rôle important dans l'étude de la géométrie dans l'espace, pour plusieurs raisons. En premier lieu elles sont souvent présentes comme illustrations d'un énoncé de géométrie, et le plus souvent assurent une fonction de communication d'informations. Mais leur intérêt essentiel réside dans leur utilité pour la résolution de problèmes, comme registre de travail pour raisonner, dessiner, trouver ou avoir une idée de solution ; elles sont utiles pour leur caractère heuristique, leur fonction de traitement.

Les travaux de recherche concernant l'étude de la géométrie dans l'espace, essentiellement au niveau du collège et du lycée, mentionnent tous des difficultés ou des manques de connaissances chez les élèves pour la maîtrise des problèmes posés en géométrie dans l'espace. La plupart de ces connaissances sont liées à l'appropriation et l'usage des représentations planes des objets de l'espace (usuelles en géométrie), dans des activités de lecture ou d'écriture de ces représentations.
Il s'agit de difficultés à changer ou articuler différents points de vue sur un même objet ; à sortir des représentations stéréotypées ; à visualiser des plans de sections dans une représentation en perspective...

Etre conscient qu'une représentation indique un point de vue, un endroit dans l'espace d'où l'on voit ; être capable de changer de point de vue et de produire une représentation en conséquence ; être capable de lire ou de déduire des propriétés de l'objet à partir d'une représentation, maîtriser les règles et les conventions d'écriture ; avoir conscience de la déformation des propriétés géométriques, ou de leur conservation, des liens existant entre objets et représentations, ... tous ces éléments sont mentionnés comme des compétences que les élèves n'ont pas ou mal ; d'autre part comme nécessaires à l'apprentissage de

---

[1] Nous nous limiterons dans ce chapitre aux représentations planes de solides *en perspective*. D'autres représentations existent : les patrons de solides occupent une place importante dans notre étude, dans le chapitre 3B de la partie « Ostension et Manipulations » ; les autres sont très rarement utilisées à l'école élémentaire.
D'autre part les solides considérés dans ce chapitre et le chapitre 3B sont les polyèdres. Un travail sur les cylindres à l'école primaire (observation, fabrication, représentations planes) a été mené par J-F. Favrat dans le cadre d'un travail de thèse et fait l'objet d'un compte rendu dans *Les solides et les surfaces cylindriques à l'école élémentaire,* revue Grand N n°55 (1994-1995).

connaissances en géométrie ; et encore comme des éléments non pris en charge dans l'enseignement de la géométrie.

Le premier paragraphe de ce chapitre sera consacré à une rapide analyse des caractéristiques des principales représentations en perspective utilisées dans l'enseignement, notamment en termes de conservation de propriétés géométriques.
Dans le second nous porterons un regard sur trois collections de manuels scolaires de l'école élémentaire, pour étudier des éléments d'élaboration didactique de ces objets graphiques.
Dans le troisième paragraphe, nous tenterons d'éclaircir des objectifs d'apprentissages, que l'enseignement peut prendre en charge pour ce degré de la scolarité.

Plan du chapitre

I. Principales représentations en perspective utilisées dans l'enseignement

II. Regard sur les manuels de l'école élémentaire

III. Objectifs d'apprentissage

IV. Conclusion

I. Principales représentations en perspective utilisées dans l'enseignement

Nous nous intéressons uniquement aux perspectives que l'on peut rencontrer à l'école et au collège : les perspectives cavalière et axonométrique, et la perspective centrale.
Il sera précisé pour chacun de ces modes de représentation une définition, en explicitant le lien qu'elles peuvent avoir avec la vision d'un objet par un observateur (fictif ou réel), ainsi qu'une étude de la conservation des propriétés géométriques, dans le passage de l'espace à la représentation (et réciproquement).
Dans les sous-titres « pour une définition » le mot "pour" est volontairement choisi afin de sous-entendre que ce sont des éléments pouvant paraître sommaires, mais nous semblant suffisants pour permettre à tous de concevoir de quoi il s'agit.
Précisons également que pour définir les principes des représentations en perspective d'objets géométriques quelconques, une méthode consiste en premier lieu à inscrire l'objet dans un cube de référence, puis à raisonner en fonction des représentations du cube. C'est pourquoi les définitions ne seront données ici que pour l'objet cube.
D'autre part le mot "rayon" sera utilisé pour donner une consistance plus matérielle aux droites intervenant dans les projections, ou reliant l'œil de l'observateur et un point de l'objet.
Le "plan de projection" est la surface plane sur laquelle s'inscrit la représentation.

1. La perspective cavalière

(notée ici parfois en abrégé PC ; appelée aussi perspective parallèle ou perspective militaire)

♦ Pour une définition

Le cube a une face parallèle au plan de projection. La projection se fait dans une même direction (les rayons sont tous parallèles) et de façon oblique (les rayons ne sont pas perpendiculaires au plan de projection).
En termes de point de vue rapporté à un observateur fictif situé à l'infini, on peut imaginer ceci : l'observateur place le cube en face de lui, de façon à ne voir que la face avant, puis le déplace vers la gauche ou la droite, puis vers le bas ou le haut. Il regarde dans la direction perpendiculaire au plan de projection, et non vers le cube (car en regardant vers le cube, il projetterait ce qu'il voit sur un plan perpendiculaire à son regard, et cela ne correspondrait plus à une représentation en perspective cavalière).

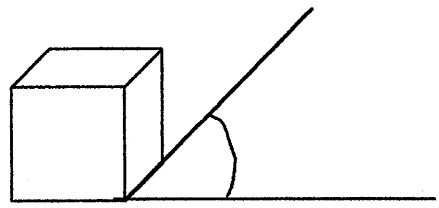
♦ Caractéristiques

Les éléments situés dans des plans parallèles au plan de projection sont représentés sans déformation en vraie grandeur (à une échelle près). Les distances et les angles dans ces plans sont les mêmes dans l'espace et sur la représentation.

Par contre les autres éléments subissent des transformations, dont certains aspects sont caractéristiques de la perspective cavalière :

- les droites perpendiculaires au plan de projection (en particulier les autres arêtes) sont représentées suivant des droites (parallèles) appelées les fuyantes. *Sur la représentation l'angle formé par ces fuyantes et l'horizontale est un élément caractéristique de la représentation.*

Le plus souvent dans les manuels on trouve des représentations en PC pour lesquelles cet angle est de 45° ou de 30°.



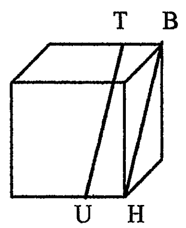
- les longueurs des segments des arêtes (perpendiculaires au plan de projection) sont également déformées, mais suivant un certain coefficient appelé *rapport de réduction. C'est le rapport « longueur de l'arête sur dessin / longueur de l'arête dans l'espace ».*

Dans un cube les arêtes ont toutes la même longueur, donc on peut aussi lire ce rapport sur la représentation comme le rapport « longueur arête fuyante / longueur arête horizontale »
Plus généralement, toute distance considérée sur une direction de fuyante (pas seulement les arêtes) subit cette "réduction" suivant le même coefficient.

♦ Propriétés conservées, c'est à dire identiques dans l'espace et dans la représentation en PC

Conservation du parallélisme.
Deux droites (ou segments) parallèles dans l'espace sont représentées parallèles.
Et réciproquement deux droites (ou segments) parallèles sur le dessin représentent des droites parallèles de l'espace si celles-ci sont coplanaires (ce qui n'est pas une information fournie par le dessin).
En particulier les arêtes parallèles pour le cube le sont aussi sur le dessin, et réciproquement.

Exemple où cette propriété est utilisée (cf. ce chapitre III.1)
(UT) et (BH) sont parallèles sur le dessin en PC donc parallèles dans l'espace.
Cela sert en particulier pour démontrer que UTHB est un parallélogramme dans l'espace



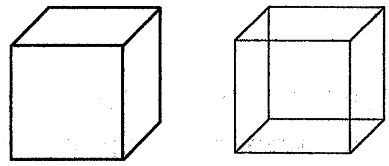
Conservation des rapports de longueurs
Les rapports de longueurs dans l'espace sont identiques aux rapports de longueurs sur la représentation et réciproquement, ceci pour des segments parallèles dans l'espace.

Par exemple si un point I est situé au tiers d'une arête sur le cube, la représentation de ce point sera également située au tiers de la représentation de cette arête.
En particulier le milieu d'un segment est représenté par le milieu du segment représenté.
Plus généralement le théorème de Thalès appliqué sur la représentation permet d'obtenir et de déduire des résultats dans l'espace.

♦ Propriétés non conservées pour des éléments qui ne sont pas situés dans des plans parallèles au plan de projection

- Si la représentation présente des pointillés ou des traits pleins pour marquer les arêtes cachées, les composantes connexes sur dessin ne sont plus identiques aux composantes connexes sur le cube, par conséquent les relations topologiques (voisinage, frontière, intersection) ne sont pas conservées. Elles le sont si la représentation correspond à un solide opaque ; alors les faces voisines sur le cube le sont sur le dessin, et réciproquement.

Il est fréquent de voir des élèves dénombrer les composantes connexes (ou en partie) sur le dessin. Cet aspect est donc à prendre en compte.

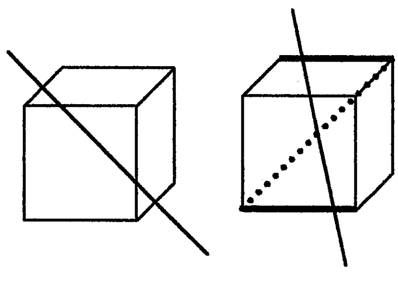


- *les distances ne sont pas conservées*
- *les angles ne sont pas conservés*
- *l'orthogonalité n'est pas conservée* (cas particulier des angles)
- *la forme géométrique des faces n'est pas conservée*
  Cela est relatif à la non conservation des angles, et des distances ; mais nous la considérons à part compte tenu de l'appréhension perceptive générale des figures.

Par exemple un rectangle dans l'espace est en général représenté par un parallélogramme sur le dessin.
Dans une représentation en PC du cube, certaines faces, carrées dans l'espace, ne sont pas représentées par des carrés sur le dessin.

- concernant l'alignement de points
  Des points alignés dans l'espace sont nécessairement représentés par des points alignés dans la représentation. Mais la réciproque est fausse en général. Des droites qui apparaissent concourantes sur le dessin ne le sont pas forcément dans l'espace.

Pour le premier exemple, les points d'intersection sur le dessin, de la droite et des arêtes du cube ne sont pas alignés dans l'espace.
Pour le second exemple, les points d'intersection sur dessin, de la droite, avec la diagonale tracée et les deux arêtes en gras, sont bien alignées dans l'espace (les points sur les arêtes sont symétriques par rapport au centre du cube, milieu de la diagonale).



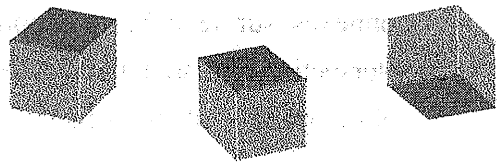
2. La perspective axonométrique

♦ Pour une définition

Le cube n'a aucune face parallèle au plan de projection. La projection se fait dans une même direction (les rayons sont tous parallèles) et de façon orthogonale (les rayons sont perpendiculaires au plan de projection).

En termes de point de vue rapporté à un observateur fictif situé à l'infini, on peut imaginer ceci : l'observateur place le cube de façon quelconque en face de lui, aucune face parallèle à lui. Alors la perspective axonométrique correspond à la façon dont il le voit (à distance très éloignée).

Quelques exemples de représentations
en perspective axonométrique classique
(que l'on rencontre dans les manuels et ordinateurs)



♦ Les différences par rapport à la perspective cavalière

Pour cette perspective on peut penser qu'il n'y a plus deux éléments caractéristiques (angle des fuyantes et rapport de réduction) mais six, correspondant aux trois angles définis par les trois directions de fuyantes, et trois rapports de réduction pour chacune de ces directions. En fait deux paramètres suffisent[2].

La perspective cavalière est un cas particulier de perspective axonométrique.

♦ Les propriétés conservées ou non entre espace et représentation

Elles sont identiques à celles énoncées pour la perspective cavalière.

3. La perspective centrale

(appelée également perspective linéaire, perspective vraie, ou encore perspective conique)

♦ Pour une définition

Les rayons issus de l'objet et un point extérieur à l'objet définissent un cône.

La représentation en perspective centrale correspond à l'ensemble des points d'intersection de ce cône et d'un plan situé entre ce point et l'objet, ou au delà de l'objet.

---

[2] Par exemple deux angles (obtus) définis sur le dessin par les projetés des arêtes d'un « coin de cube », le troisième angle étant obtenu par différence. Les coefficients de réduction sur chaque arête se calculent alors : « racine de (moins cosinus a sur (sinus b multiplié par sinus c)) » fournit le coefficient sur l'arête perpendiculaire au plan du cube donnant l'angle a sur l'image ; les autres sont obtenus par permutation de a, b et c.

En termes de point de vue rapporté à un observateur réel cette fois-ci, la perspective centrale correspond à la façon dont il voit l'objet, en plaçant son œil au sommet du cône.

♦ Conservation des propriétés

Les principales propriétés d'un objet de l'espace, parallélisme, orthogonalité, longueurs et rapport de longueurs, angles, ne sont pas conservées, en général, dans une représentation en perceptive centrale.

Par contre la forme et les rapports de longueurs d'un objet plan, situé dans un plan parallèle au plan de projection, sont conservés. Et deux objets plans identiques, situés dans deux plans distincts parallèles au plan de projection, ont la même forme, mais n'ont pas la même taille.

II. Regard dans les manuels de l'école élémentaire

Nous allons chercher à déterminer quelle prise en charge était faite par l'enseignement à l'école élémentaire d'une problématique liée à l'usage des représentations planes de solides. Pour cela nous avons répertorié l'ensemble des tâches proposées dans trois collections de manuels scolaires : Nouvel Objectif Calcul, Diagonale, et J'apprends les maths, sur l'ensemble des niveaux du CP au CM2 (annexe 1).

Dans un premier paragraphe nous rendrons compte de ce repérage d'un point de vue global, en reprenant les différentes tâches proposées aux élèves ; et nous proposerons dans un second temps une analyse des situations d'introduction des représentations en perspective dans les manuels de CE1 de ces trois collections.

1. Aperçu général sur l'usage des représentations planes de solides

Où la tâche n'est pas liée à l'usage des représentations, celles-ci assurant clairement une fonction d'illustration :
Les situations de constructions d'objets. Les représentations assurent essentiellement une fonction d'illustration, les représentations principales pour décrire l'objet sont en général un texte, ou un patron.

Où la tâche porte explicitement sur la lecture de représentations planes :
Les situations de reconnaissance de représentations. Reconnaître une représentation plane parmi un ensemble donné ; mettre en relation différentes représentations.
Pour ces tâches nous constatons en général que des indices plans (les représentations en tant que figures planes) permettent le plus souvent de répondre aux questions[3].
Les situations de production de représentations en perspective
En fait il s'agit très rarement pour les élèves de produire d'eux-mêmes une représentation plane. C'est en général une *activité de reproduction* qui est proposée, le plus souvent c'est un travail de reproduction de figures en géométrie plane qui ne fait intervenir en rien des objectifs d'apprentissage liés aux représentations planes. Par contre lorsqu'il s'agit de *compléter* ou *modifier* une représentation plane, la tâche nécessite souvent de mettre en œuvre des connaissances sur les représentations.

[3] Voir à ce propos l'article *A propos de patrons de solides,* Grand N n°57 (1995-1996), basé sur l'analyse de l'activité proposée dans Nouvel Objectif Calcul CM1, ex n°3 p149, et dans un sujet du Concours Externe de Recrutement de Professeurs des Ecoles.

Où la tâche porte *implicitement* sur la lecture de représentations planes :
Les situations de description de solides à partir de ces représentations : dénombrer les faces, arêtes, sommets d'un solide ; ou les solides constituant un autre solide ; déterminer la nature des faces d'un solide ; nommer des éléments sur un solide.

Arrêtons-nous quelques instants sur la tâche consistant à « indiquer le nombre de faces, arêtes, sommets d'un solide » pour expliquer ce que nous entendons par « implicitement ».
La situation proposée dans tous les manuels peut être décrite ainsi : des solides sont représentés en général en perspective cavalière, les variables liées aux conventions de semi-transparence et de coloration sont fixées (différemment suivant les manuels), et l'énoncé peut être résumé par « Observe les solides représentés et compète le tableau ». L'énoncé propose un tableau à double entrée : nom du solide (ou lettre le désignant) / nombre de ...
Les objets du milieu objectif sont les solides en question puisque les résultats portent sur des informations concernant les solides eux-mêmes. Les représentations de ces solides font également partie du milieu. Elles sont un moyen de communiquer de quel solide il s'agit.
Si l'élève considère la représentation comme une façon lui permettant de saisir « pour lui » le problème, et d'en choisir ses propres moyens de résolution, la représentation remplit alors une fonction d'objectivation[3]. La représentation du solide permet de faire appel dans sa tête (ou en vrai) à l'objet qu'elle représente. Les moyens de résolution sont parmi les suivants : faire appel à des connaissances déjà construites (« je sais qu'un cube a six faces, ... ») ; ou bien faire appel à une représentation analogique de l'objet en trois dimensions (maquette, ou objet familier).
Or l'association dans l'énoncé des verbes « observe » et « complète » indique très fortement un lien entre la tâche et la lecture de ces représentations comme moyen de résolution. Le contrat didactique rend quasi impossible la restitution par l'élève d'une possible fonction d'objectivation. En général l'élève considère la représentation comme l'objet sur lequel il faut travailler, la représentation remplit une fonction de traitement, et il faut alors maîtriser les règles de lecture de la représentation.
C'est pourquoi ce genre d'exercice détourne la tâche portant initialement sur les solides, en une tâche de lecture de représentations planes[4].

Regardons maintenant les activités, dans les trois collections de manuels, où apparaissent pour la première fois des représentations en perspective de solides, celles usuelles utilisées en géométrie.

---

[3] Définie au chapitre 2A-II.2.b.

[4] Voir annexe 6, le début de la séance en formation continue porte sur l'analyse de travaux d'élèves de CM2 et CE2 pour cette tâche.

2. Introduction des représentations en perspective

L'étude porte sur les manuels de CE1, car nous ne trouvons rien au niveau CP pour les trois collections consultées.

Les représentations en perspective apparaissent dans des situations faisant suite à des activités d'observation de description et de classement de solides ; activités permettant en général de positionner l'étude de ces objets sur leur forme géométrique, de dégager les noms génériques (cube, pavé, cylindre, ...), d'introduire les notions de face, arête, sommet, et le vocabulaire, de préciser des distinctions sur face plane ou non plane.
Ensuite nous trouvons des activités faisant intervenir des représentations planes de solides.

a) J'apprends les maths CE1[5]

Les premières représentations de solides proposées aux élèves apparaissent sur des « cartes d'identité » préparées par le maître. La tâche pour les élèves consiste à remplir la fiche (indiquer le nombre de faces, sommets, arêtes) en agissant directement sur des solides.
Les auteurs précisent :

> « A chaque fois, le dessin qui sert de référence est celui d'un solide typique de sa catégorie. L'activité consiste à dénombrer les faces, les arêtes et les sommets sur ce solide, puis sur les autres qui sont moins caractéristiques mais qui seront reconnus comme appartenant à la même catégorie. Elle peut se mener de la manière suivante : l'enseignant extrait un parallélépipède caractéristique ... »

- **La place de la représentation dans les indications fournies par les auteurs pour le discours du maître est inexistante.**

Les auteurs s'adressent au maître pour préciser le choix qu'il doit faire du dessin pour réaliser sa carte d'identité. Ils ne donnent pas d'indication sur une présentation éventuelle de ce dessin aux élèves. D'ailleurs dans les objectifs généraux de toute la séquence (activités préparatoires et exercices) aucune mention n'est faite en ce qui concerne les représentations planes de solides.
La représentation assure simplement une fonction d'illustration sur la feuille servant à mémoriser les informations prélevées sur le solide. Remarquons toutefois une cohérence entre tâche et objet du travail, contrairement à la description faite dans le paragraphe précédent.

---

[5] livre du maître p137, annexe 2a.

Ensuite les élèves ont à faire un exercice sur le fichier (annexe 2b) pour lequel aucune indication n'est précisée dans le livre du maître si ce n'est que les affichages réalisés lors des activités préparatoires (les fiches d'identités) sont maintenant « masqués ».
Pour cet exercice :

- **Aucune distinction n'est faite entre le solide et une représentation de ce solide.**

Cette confusion est affirmée dans l'annonce des objectifs de l'exercice du manuel :
« Reconnaître des solides dans des présentations atypiques (cylindre très allongé, etc.), [...]. »
Or ce qui est présenté dans l'énoncé de façon « atypique » ce ne sont pas les solides, mais leurs représentations.
Du fait que les auteurs instaurent dans l'énoncé une confusion entre un solide et une représentation de ce solide, les élèves risquent de faire de même. Alors il n'est pas exclu que « le nom de chaque solide » demandé dans la tâche devienne pour les élèves « le nom de chaque représentation ». Et il ne serait pas étonnant de voir apparaître des réponses comme « c'est un tuyau », « c'est une boîte plate », « c'est un toit à l'envers », « c'est un camembert », « c'est un cornet de glace ». Ces réponses seraient cohérentes par rapport à la question posée.
Les objets principaux du milieu avec lesquels l'élève doit interagir ne sont plus les solides mais les représentations de solides.

- **Les fonctions des représentations évoluent au cours de l'exercice.**

En effet dans les premiers exemples proposés dans l'exercice, elles ont un statut de représentations auxiliaires par rapport aux représentations principales[6] données dans le registre textuel (« une sphère », « un parallélépipède », ...). En tant que représentations auxiliaires elles assurent une fonction d'illustration. A l'opposé, dans la suite, elles deviennent représentations principales et assurent une fonction de traitement puisque l'élève doit les lire et les interpréter pour répondre à la question.

Finalement, l'objectif qui se dégage par rapport à ce que propose l'exercice, semble être :
être capable d'identifier différentes représentations de solides de même nature.
C'est donc un travail sur les représentations et sur les caractéristiques qui définissent la nature d'un solide, mais de cela rien n'est dit pour le maître.

En conclusion, dans ce manuel, les représentations en perspective, usuelles en géométrie, n'ont pas de statut épistémologique. C'est à dire :

---

[6] Cf. R. Duval (1999)

- elles ne sont pas considérées par les auteurs comme des objets dont *l'appréhension nécessite un autre rapport* qu'un rapport naturel. L'élève les voit, point.
- elles ne sont pas considérées comme des objets nécessitant *une analyse de la part de l'élève, et la mise en œuvre de connaissances pour l'appréhender.*
- elles ne sont pas considérées comme un objet d'enseignement.

b) Diagonale CE1[7]

Pour l'ensemble de la séquence dont il est question, les objectifs annoncés sont :

- Faire observer et classer des solides.
- Faire acquérir un vocabulaire spécifique relatif aux solides

Aucune mention n'est faite sur les représentations planes de solides, tout comme pour le manuel précédent, alors qu'elles vont être introduites dans cette séquence.

Après une première phase de découverte, observation de solides, puis une seconde phase de classement des solides, la troisième phase est celle de « l'application individuelle » ou plus clairement le travail sur le fichier.
Pour le premier exercice (annexe 3b), nous trouvons des cases dans lesquelles figurent une représentation en perspective cavalière avec traits pleins et traits pointillés et une image « figurative » (des objets dessinés) renvoyant à des objets du quotidien. La consigne est : « Ecris les lettres des solides qui peuvent rouler. »
Précisions données dans le livre du maître :

- Demander à chaque enfant d'observer l'image du fichier. Recueillir toutes les remarques sur les objets représentés et faire apparaître le lien entre le dessin de l'objet et sa représentation géométrique.
- Faire réaliser par chaque enfant l'exercice.

Que signifie « faire apparaître le lien entre le dessin de l'objet et sa représentation géométrique ? » Quel est ce lien ? Et comment le faire apparaître ? Nous nous limiterons à cette question, sans prendre en compte l'autre tâche demandée dans cet exercice, à laquelle d'ailleurs les élèves peuvent répondre en référence uniquement aux images du quotidien.

- Quel peut être le lien entre le dessin représentant la boîte de sucre et la représentation d'un pavé en perspective cavalière ombrée avec pointillés ?

---

[7] Livre du maître p 132, annexe 3a.

Si la représentation en perspective cavalière est considérée comme représentation principale, l'objet de référence du travail est l'objet géométrique "pavé" dont rien n'est dit par ailleurs. Le dessin de la boîte de sucre remplit alors une fonction d'exemple ; exemple d'une représentation d'un objet matériel ayant une forme de pavé.

Si le dessin de la boîte de sucre est considéré comme représentation principale l'objet de référence du travail est un objet du quotidien, une boîte de sucre comme nous en achetons au supermarché. Le dessin comporte différents éléments comme la forme, les inscriptions figuratives, textuelles, le contenu (c'est du sucre et pas des gâteaux), les références au contenu (ça se mange, ce n'est pas salé, ...) ... Rien parmi ces éléments n'est privilégié dans le dessin. C'est la présence de la représentation en perspective d'un pavé qui permet de privilégier un élément de l'objet de référence : sa forme géométrique ; mais qui le sait ?

- De quel point de vue l'élève peut-il se placer ?

Il parait raisonnable de penser que l'objet de référence pour l'élève de CE1 sera la boîte de sucre. Il est plus familier de ces images que des autres ; et rappelons le c'est la première fois qu'apparaît dans une situation didactique une représentation en perspective cavalière de type géométrique.

Or la lecture de celle-ci implique de :

- reconnaître cette représentation plane comme une représentation d'un objet de l'espace et non pas la reconnaître comme une figure plane,
- reconnaître par la nature de la face avant, et l'allure générale, que l'objet en question est un pavé,
- reconnaître que les pointillés permettent de délimiter sur la représentation les faces cachées du solide.

A travers cet exercice, les auteurs ne tentent-ils pas de faire acquérir ces connaissances à l'élève ? Rappelons que les objectifs annoncés par les auteurs ne mentionnaient rien concernant les représentations planes de solides.

L'objectif réellement poursuivi n'est-il pas d'introduire une représentation en perspective cavalière d'un pavé, de la faire observer par les élèves, afin par la suite de pouvoir la considérer comme une représentation principale. L'objectif implicitement suivi, pour les élèves cette fois, ne serait-il pas d'apprendre à lire une représentation de ce type ?

C'est en effet l'hypothèse que nous faisons. Aucune autre introduction didactique de représentations en perspective cavalière n'est prévue par la suite dans le manuel, elles seront présentées par les auteurs dans des exercices postérieurs comme des représentations principales, pour lesquelles un travail de lecture sera demandé.

En résumé dans ce manuel l'introduction des représentations en perspective est faite de manière ostensive, au sens négatif du terme[9], sans prise en charge dans les indications pour le maître des objectifs réellement poursuivis.

c) Nouvel Objectif Calcul CE1[10]

La présentation des représentations de solides est prévue en activité préparatoire aux exercices du manuel, après des activités d'observation, de description et de classement.

> Objectif
> Identifier des solides, les décrire.
> Domaines de compétences
> ...Il n'est pas évident pour un enfant qu'un dessin en perspective puisse représenter un objet de l'espace à trois dimensions. Un second objectif de cette étape est donc de conduire les enfants à associer tout d'abord des objets familiers à des dessins plans de ces objets grâce à divers indices les rendant reconnaissables, puis les dessins de ces objets à des représentations planes conventionnelles en perspective des solides géométriques de mêmes formes que ces objets (par exemple l'élève reconnaît, dans un dessin plan, la représentation d'une boîte de céréales, puis il associe à ce dessin la représentation en perspective d'un parallélépipède rectangle ou pavé droit). Ce travail est fondamental pour que les enfants puissent identifier, à partir de représentations planes conventionnelles, les solides auxquelles elles sont associées ...
> [...]
> Activité préparatoire 5 : de l'espace au plan
> Distribuer à chaque groupe plusieurs solides. Afficher au tableau une grande feuille sur laquelle figurent les représentations planes conventionnelles des solides [annexe 4b].
> Montrer une représentation, et demander aux enfants de chercher s'ils possèdent le solide qui est ainsi représenté. Si oui, ils le montrent, et un enfant vient montrer au tableau comment est placé le solide pour qu'on puisse le voir ainsi.
> Reprendre cette activité avec un enfant comme meneur de jeu : il choisit un solide sans montrer lequel à ses camarades et le met dans un sac opaque. Il vient montrer sa représentation plane au tableau, les autres enfants exhibent le solide qui leur semble être représenté. Le meneur de jeu sort son solide de son sac pour le confronter aux propositions. S'il y a erreur, soit de la part du meneur de jeu, soit de la part des autres élèves, ces erreurs sont analysées. »

---

[9] Dans le chapitre 3A nous réétudions la notion d'ostension.

[10] Livre du maître p 78, annexe 4a.

- **La question des représentations planes de solide est clairement prise en charge par les auteurs.**

Le travail d'approche et de lecture des représentations planes de solides est annoncé comme objectif d'apprentissage (sans toutefois préciser les compétences en jeu dans cet apprentissage).

- **Les représentations apparaissent comme des objets d'étude, objets matériels dans le milieu matériel**.

Ce sont des représentations d'objets de l'espace, comme ceux étudiés par les élèves dans les activités précédentes, et il s'agit de faire le lien entre ces représentations et les solides déjà manipulés.

- **Les interactions de l'élève avec le milieu sont de l'ordre de l'observation.**

- Les figures peuvent être interprétées par un élève comme des figures du plan et les prises d'indice se font par rapport à des critères plan : par exemple repérer le carré dans des représentations et affirmer que ce sont des représentations de cube, ou repérer les lignes arrondies des objets cylindriques, ...
- Ou bien l'élève peut accorder une valeur spatiale à la représentation, tenter de saisir la profondeur, la mise en perspective, et lire la représentation tant bien que mal, en faisant preuve d'un certain bon sens.
- L'élève peut également reconnaître immédiatement certains dessins comme représentation de tel objet, si c'est une image déjà intégrée et mémorisée.

En résumé, les auteurs du manuel prennent ouvertement en charge la problématique liée à l'usage des représentations planes de solide. L'enseignement se fait par « ostension assumée ». La reconnaissance se fait sur le mode du bon sens perceptif des élèves, et la validation sous le contrôle du maître.

3. Sollicitations officielles

Parmi les trois manuels étudiés, un seul prend en charge la question de l'utilisation des représentations planes de solides. Remarquons que les programmes officiels eux-mêmes n'incitent aucunement à cette prise en charge puisque très peu d'indications à ce sujet sont fournies.

En effet, dans les programmes de 1995[10], nous trouvons pour le cycle 3 l'énoncé sibyllin « Représentation plane d'objets de l'espace ; patrons » sous la rubrique « Géométrie » ; de même dans la consultation sur les nouveaux programmes de septembre 2001, pour le cycle 3 :

> « L'identification [de solides] se fait parmi d'autres solides ou parmi des représentations planes d'objets de solides (vues, patrons). Le travail sur la perspective cavalière relève du collège : seules des activités relatives à la « lecture » de telles représentations sont envisageables au cycle 3 (reconnaissance de certains solides ou mise en correspondance du solide réel avec une représentation en perspective). »[11]

Rien n'est dit sur d'éventuelles connaissances.
Par contre, un document mis en circulation puis abandonné, de projet d'application des programmes de l'école élémentaire[12], était très explicite sur certains objectifs d'apprentissage relatifs à l'usage de représentations planes de solide, au cycle 2 et 3 :

> « Au cycle 3, on passe des représentations des solides opaques (vu au cycle 2) aux représentations faisant apparaître les arêtes cachées. Au vu d'un dessin, on pourra demander aux élèves :
> - de choisir un solide parmi une collection de représentations planes,
> - de reconnaître des angles droits alors que le dessin plan les représente autrement,
> - de préciser la forme de certaines faces (faces carrées, rectangulaires ...)
>
> Deux arêtes parallèles sur le solide sont toujours représentées par des segments parallèles. En revanche deux segments ou deux angles égaux sur le solide ne sont pas nécessairement égaux sur sa représentation plane. »

Nous allons tenter dans le paragraphe suivant de mettre en évidence des connaissances nécessaires à l'usage des représentations planes de solides, et définir ainsi explicitement des objectifs d'apprentissage que l'on peut se fixer pour l'école élémentaire. Nous retrouverons bien sûr quelques points cités précédemment.

---

[10] *Programmes de l'école primaire*, Ministère de l'Education Nationale Direction de Ecoles, CNDP (1995).

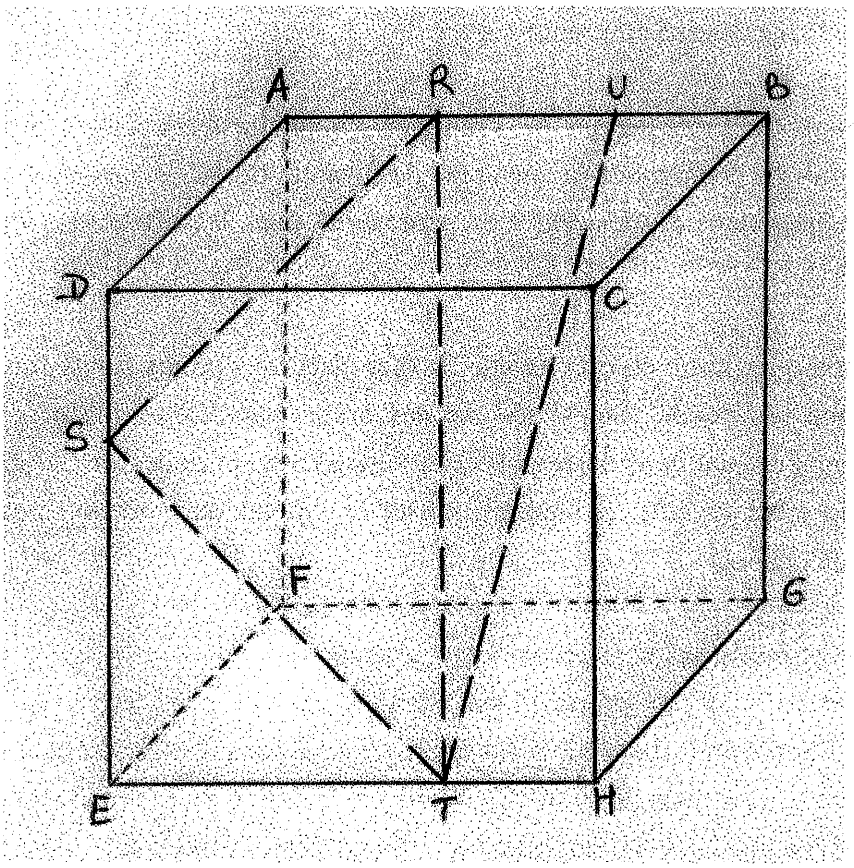
[11] *La consultation sur les nouveaux programmes de l'école primaire, cycle 3, projet de document d'application en mathématiques*, p22, site Internet du Ministère de l'Education Nationale.

[12] *Document d'application des programmes de l'école élémentaire*, Bulletin Officiel n°7, 26 août 1999. Un extrait est donné en annexe 6, appendice 2.

III. Objectifs d'apprentissage

Dans un premier temps nous allons étudier un exercice de collège, début de lycée, de géométrie dans l'espace, faisant intervenir une représentation plane de solide, afin de cerner les connaissances nécessaires en jeu dans ce genre d'exercice. Nous nous interrogerons ensuite sur la possibilité de développer dès l'école élémentaire des compétences et connaissances mentionnées précédemment, afin de fixer des objectifs d'apprentissage.

1. Un exemple d'exercice de géométrie dans l'espace



1. Représenter, comme ci-contre, en vraie grandeur, un cube dont l'arête mesure 6,5 cm[14].
2. Placer les points R, S et T sur les arêtes [AB], [DE] et [EH], tels que AR=DS=HT=2cm.
3. Le triangle RDS est un triangle rectangle. Expliquer pourquoi.
4. Placer le point U sur l'arête [AB] tel que BU=2cm.
   Quelle est la nature du quadrilatère BHTU ? Expliquer.

---

[14] Cette longueur n'est pas celle proposée dans le document d'origine, voir note 15, qui implique de modifier légèrement la position du point R pour faire apparaître l'angle $\widehat{TRU}$ comme droit. Pour une reprise de l'exercice il vaut mieux prendre comme ici une mesure de l'arête du cube de 6,5 cm.

Quelle est la nature du triangle TUR ? Expliquer.

5. Construire, au compas et à la règle, en vraie grandeur, les triangles ARD, RDS, TUR et RST, sans faire aucun calcul.

A l'origine, cet exercice[15] est proposé avec des questions portant essentiellement sur des mesures de longueurs, de façon à faire utiliser le théorème de Pythagore et sa réciproque. Le seul réel problème d'appréhension de représentation qu'il pose alors est le cas du triangle RUT, pour lequel on visualise un angle presque droit en R, alors que le triangle est rectangle en U. C'est pourquoi nous nous sommes permis de transformer l'énoncé, pour en faire un problème permettant de mettre en jeu des compétences importances à développer en géométrie de l'espace, que nous allons lister.

La première question permet de souligner l'implicite concernant les paramètres de la perspective utilisée pour ce dessin : un angle de fuyantes de 45°, et un coefficient de réduction de ½. Il est important de respecter ces paramètres pour les effets visuels voulus pour le propos.

La seconde question n'en est pas une. Il faut placer les points sur la figure. Remarquons cependant que ces points sont situés sur des arêtes parallèles au plan de projection, les longueurs données vont donc correspondre aux longueurs sur le dessin. Si un point devait être situé sur une arête fuyante, il faudrait utiliser le rapport de réduction pour déterminer sa position sur le dessin.

La troisième question fait intervenir deux aspects :

- la différence entre une propriété géométrique dans l'espace, et sa représentation sur le dessin ; l'angle droit du solide n'est pas représenté par un angle droit sur le dessin. On ne peut donc se contenter de ce que l'on voit sur le dessin pour déduire. Il est nécessaire de faire appel à une autre vision, celle virtuelle de l'objet dans sa tête, ou bien une maquette, pour visualiser l'angle droit en D du triangle RDS.
- La justification utilisant deux propriétés géométriques d'incidence dans l'espace (au programme de seconde) : « Une droite perpendiculaire à deux droites sécantes d'un plan est perpendiculaire à ce plan » ; « Une droite perpendiculaire à un plan est perpendiculaire à toute droite de ce plan ».

---

[15] Extrait du livre *Maths-4ème* de l'IREM de Strasbourg, Ed. Hachette-Istra, 1992 (annexe 5) ; et support à l'article d'un collectif de l'IREM de Strasbourg, *Voir et raisonner : à la conquête de l'espace au collège*, Repères IREM n°33, 1998.

La quatrième question sur le quadrilatère BHTU en tant que parallélogramme, permet de dégager :

- un aspect lié à la différence des propriétés sur le dessin et dans l'espace ; où cette fois-ci il y a congruence, correspondance, équivalence : « Deux droites parallèles sur le dessin sont parallèles dans l'espace (et réciproquement) ». Avec cependant la nuance que cette propriété n'est valable que parce que la perspective utilisée est la perspective cavalière, dont c'est là une des caractéristiques.
- un aspect lié à une propriété d'incidence dans l'espace : « Deux droites parallèles dans l'espace définissent un plan ».
- un autre aspect lié aux connaissances de géométrie plane en jeu, à utiliser dans le plan BHTU.

La quatrième question concernant la nature du triangle TUR pose à nouveau la question des différences entre propriétés sur dessin et propriétés sur solide, avec ici une volonté délibérée de marquer cette différence par « le piège » d'un angle droit en R sur le dessin alors que le triangle est rectangle en U.

La cinquième question permet de dégager des aspects liés aux longueurs, différentes ou identiques sur le dessin et sur l'objet. Il apparaît différentes façons de procéder. Par exemple

- pour AD, il faut revenir à la signification du segment [AD] comme arête du cube donc mesurant 6,5 cm ;
- RD se détermine en vraie grandeur sur le dessin ;
- UT vaut BH, diagonale du cube, que l'on peut mesurer directement en vraie grandeur sur le dessin, sur la face DCHE ou ABGF parallèles au plan de projection ;
- ST est lue directement en vraie grandeur sur la face DCHE.

La construction de triangles en vraie grandeur permet de construire les autres longueurs.

En conclusion il apparaît des connaissances géométriques et d'autres, non formalisées en langage géométrique, mais indispensables à la maîtrise de ce genre d'exercice et de réflexion au cœur de l'activité mathématique en géométrie dans l'espace.
Ces connaissances nécessaires aux activités de lecture, d'écriture, de traitement des représentations planes, sont liées à deux problématiques distinctes :

- **une problématique phénoménologique[16], qui concerne les rapports entre un objet et ses représentations ;**

---

[16] D'après Le Petit Robert : relatif à la phénoménologie, *description d'un phénomène* (ici l'articulation entre un objet et ses représentations en perspective), *en dehors de toute construction conceptuelle.*

- **une problématique mathématique, liée au type de projection utilisée pour la représentation.**

C'est ce que nous allons développer maintenant.

2. Problématique phénoménologique et problématique mathématique

Ce qui relève de la problématique phénoménologique :
- savoir qu'une représentation est liée à la notion de point de vue, qu'elle met en jeu un observateur et un objet, qu'elle consiste à ramener dans un plan une image pour donner l'illusion d'une réalité, ...
- savoir qu'elle est liée à ce que l'on veut faire de la représentation, ... et que l'on peut utiliser des codes pour représenter tel ou tel aspect (par exemple les nuances de couleurs, les pointillés, ...)
- savoir que les propriétés sur le dessin ne sont pas les mêmes que les propriétés du solide,
- savoir que tous les aspects d'un objet ne sont pas représentés ...

Toutes ces connaissances relèvent de la problématique phénoménologique, et sont indépendantes du système de représentation choisie.

Par contre ce qui concerne les règles mathématiques des projections, les caractéristiques géométriques d'une perspective, les propriétés conservées ou non dans la représentation, toutes ces connaissances relèvent d'une problématique mathématique. Certaines sont géométriques, peuvent se formuler en termes de géométrie, et d'autres non formalisables sont plus de l'ordre de connaissances spatiales[17].

En ce qui concerne la production d'une représentation, pour reprendre l'expression consacrée par les travaux de F. Colmez et B. Parzysz[18], nous pourrions dire que ces deux problématiques s'articulent autour des questions relatives au « conflit voir / savoir » : une représentation ne peut rendre compte à la fois de la vision de l'objet et de ce que l'on sait de lui. Il faut donc opérer des choix. Que veut-on montrer ? Quelle est la finalité de la représentation ?

---

[17] Ce sont les rappels faits dans le paragraphe I.

[18] COLMEZ F., PARZYSZ B. (1993) *Le vu et le su dans l'évolution de dessins de pyramides du CE2 à la seconde,* dans Espaces graphiques et Graphismes d'espaces, Ed. La pensée sauvage.

« Le dessin [...] a deux significations. Dessiner un objet, c'est le représenter avec des traits, des clairs et des ombres. Dessiner un tableau, un édifice, un groupe, c'est y inscrire sa pensée. Voilà pourquoi nos pères écrivaient dessein, et cette orthographe intelligente disait clairement que tout dessin est un projet de l'esprit. »[19]

Le choix d'un mode de représentation va donc se faire en fonction d'exigences spécifiques à la communication que l'on établit. Pour ce qui nous intéresse, la distinction principale est celle entre perspective cavalière et perspective centrale :

« En adoptant ce mode de dessin [le dessin d'imitation, perspective centrale], le dessinateur poursuit un objectif spécial, qui est de produire dans son œuvre l'illusion de la réalité, et qu'il ne peut le faire qu'à la condition expresse de copier, non pas la forme réelle, mais la forme apparente des objets.
<u>Il est donc indispensable qu'il adopte un autre mode de dessin, s'il veut donner, non plus l'apparence de la forme, mais la réalité des dimensions.</u> [...] Le dessin linéaire [perspective cavalière] n'est guère autre chose qu'une représentation géométrique des surfaces et des solides. »[20] (souligné par l'auteur).

Nous renvoyons à l'ouvrage très clair et instructif de P. Comar[21] pour les éléments permettant de resituer les choix historiques concernant l'usage de tel ou tel mode de représentation.
Rappelons simplement que la perspective cavalière (ou axonométrique) est celle utilisée en géométrie du fait de ses caractéristiques qui permettent *d'effectuer des mesure*s sur le dessin moyennant la connaissance des paramètres utilisés pour la projection. Et d'autre part son rendu visuel ne s'éloigne *pas trop* de l'illusion de relief.

S'intéresser à la problématique phénoménologique peut se faire quelles que soient les perspectives choisies. Et c'est parce que nous nous intéressons à l'école élémentaire, qu'il nous semble raisonnable de placer cette problématique au centre des apprentissages à ce degré de la scolarité.

3. Objectifs d'apprentissage pour l'école élémentaire

---

[19] D'HENRIET L. (1877) Cours rationnel de dessin, à l'usage des écoles élémentaires. Ed. Hachette et Cie, Paris, p9.

[20] Ibidem p12-13.

[21] COMAR P. (1992) *La perspective en jeu, les dessous de l'image,* Découverte Gallimard.

L'école élémentaire vise à développer chez les élèves *des connaissances pour tous* : celles utiles pour la géométrie dans l'espace, mais aussi pour ceux, futurs architectes, plombiers zingueurs, dessinateurs, scénographes, ... de multiples domaines où interviennent les images, et la lecture d'images en général fait partie de domaines de compétences travaillés à l'école.
Nous faisons l'hypothèse que la problématique phénoménologique peut être prise en charge dans l'enseignement de la géométrie dès l'école élémentaire. Ce qui suit nous paraît raisonnable de formuler et de travailler comme objectifs d'apprentissage :

Des objectifs généraux à long terme

- Constituer un bagage suffisant d'expériences liées au travail sur les représentations planes d'objets de l'espace, bagage non réduit à la connaissance de représentations stéréotypées ;
- Améliorer les compétences, connaissances et savoirs des élèves dans :
  - la lecture de représentations planes d'objets de l'espace
  capacité à accorder une valeur spatiale aux dessins, à envisager la profondeur (le relief) ;
  capacité à décoder les conventions (semi-transparence, opacité, pointillés ...)
  - la production de représentations, dans le cadre de la résolution de problème, un dessin pour soi, à main levée ;
  - la capacité à changer de point de vue sur un objet
  - le développement de représentations mentales d'objets de l'espace

Des objectifs à plus court terme

- **Prendre conscience du lien entre représentation et point de vue**
  Une représentation en perspective définit (ou est définie) plus ou moins (par) un endroit dans l'espace d'où l'on voit l'objet « comme » sur la représentation.
  Dit autrement, la représentation correspond (à peu près) à ce que l'on voit des lignes du solide ramenées à un plan.

- **Travailler sur la mise en place des conventions liées aux arêtes cachées.**
  Les arêtes cachées à la vue pour un solide opaque peuvent être représentées en traits pleins, ou en traits pointillés sur un dessin.

- **Repérer les différences de propriétés entre le solide et ses représentations en perspective.**
- Toutes les faces et arêtes ne sont pas nécessairement représentées.

- Les faces du solide ne conservent pas toutes leur forme sur le dessin. Pour un pavé par exemple certaines faces rectangulaires sur le solide sont représentées parfois par des parallélogrammes.
- Les angles droits sur le solide ne sont pas forcément droits sur le dessin.
- Les longueurs des arêtes ne sont pas toutes conservées sur le dessin.
- Les arêtes parallèles sur le solide sont toujours représentées parallèles sur le dessin (ceci n'est valable que pour les représentations en perspective cavalière)

- **Travailler sur la multiplicité des points de vue sur un même objet, et donc la multiplicité des représentations.**

Certaines sont plus pertinentes que d'autres pour visualiser certaines propriétés du solide.
Certaines sont insuffisantes pour rendre compte de l'allure générale du solide, et pouvoir le reconnaître.

Nous avons conscience que notre hypothèse ne peut être validée ici, ce n'est pas la direction que nous avons choisie de privilégier dans l'étude. Nous l'avons soumise comme élément de clarification et piste de travail pour des recherches à venir.
De la même façon, nous proposons quelques éléments de réflexion pour engager un travail en formation continue sur ces questions.

4. Objectifs pour la formation continue

- Faire prendre conscience aux enseignants du décalage existant entre le travail mené sur les solides, dans un contexte spatial, et les modes d'institutionnalisation, et d'évaluation courantes basés sur l'usage des représentations en perspective.
- Mettre en évidence que la lecture des représentations planes de solides nécessite certaines connaissances, relatives aux problématiques phénoménologique et mathématique, et que les premières peuvent être prises en charge dès l'enseignement à l'école élémentaire.
- Etre explicite sur les contenus sous-jacents à la problématique phénoménologique, en listant de manière exhaustive les connaissances en jeu.
- Proposer quelques pistes d'activités ou de dispositifs permettant aux enseignants de réaliser des activités spécifiques ou au moins permettant d'être vigilants dans les activités classiques menées avec les élèves.

Dans l'annexe 6, compte rendu d'une séance en formation continue lors d'un stage « Mathématiques / Technologie », nous faisons part de quelques choix faits en tant que formateur relatifs à ces objectifs :

- Une étude de travaux d'élèves en CM2 et CE2 à propos de tâches classiques, telle « indiquer le nombre de faces, arêtes, sommets, d'un solide » ...
- La mise en activité des stagiaires sur l'exercice de géométrie étudié ici dans le paragraphe 1, pour les confronter directement à la question des connaissances nécessaires pour résoudre.
- L'étude de textes relatifs à des objectifs d'apprentissage.
- Une proposition d'usage d'un matériel de manipulation basé sur l'usage de photos, calques et feuilles blanches, permettant de visualiser différentes étapes dans la conceptualisation des représentations planes de solides.

IV. Conclusion

Les représentations planes de solides, omniprésentes dans les activités proposées aux élèves de l'école élémentaire concernant les solides, ne font pourtant pas l'objet d'un apprentissage. Leur production et utilisation paraît institutionnellement transparente.
Pourtant nous avons listé les connaissances nécessaires à ces travaux : ce ne sont pas des connaissances géométriques, répertoriées dans le corpus de la géométrie, mais des connaissances *pour faire* de la géométrie. Nous avons montré en quoi elles sont indispensables pour traiter des problèmes de géométrie dans l'espace proposés à des niveaux de scolarité supérieurs, et nous pouvons ajouter, dans d'autres champs disciplinaires et domaines professionnels.

L'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire doit prendre en compte la problématique phénoménologique liée aux représentations planes de solides, pour une nécessaire « genèse didactique »[20] de ces « objets » à ce niveau de la scolarité.

[20] Vocabulaire emprunté à G. Brousseau.

Troisième partie

Expériences spatiales pour faire de la géométrie : ostension et manipulations

Chapitre 3A
L'ostension : phénomène ou procédé didactique ?

Chapitre 3B
Exemples pour une ostension maîtrisée dans le cadre de l'étude des patrons de solides

Chapitre 3C
Exemples pour une ostension maîtrisée dans le cadre de l'étude de la symétrie axiale

CHAPITRE 3A

L'OSTENSION :
PHÉNOMÈNE OU PROCÉDÉ DIDACTIQUE ?

Une hypothèse de travail faite dans le chapitre définissant les cadres théoriques était la suivante : « Les concepts de géométrie sont utiles pour résoudre des problèmes spatiaux ».
Nous avons vu dans la partie précédente concernant les dessins en géométrie que ces concepts de géométrie ne sont pas séparables de représentations dans l'espace graphique, et de fait cet aspect induit la nécessaire prise en compte du statut de l'environnement papier crayon dans la problématique géométrique et de modélisation.

Nous allons étudier ici ces concepts de géométrie sous l'angle des situations didactiques permettant leur apprentissage à l'école élémentaire. C'est à un type de situations particulières que nous allons nous attacher : non pas les situations de résolution de problème mais à l'autre extrême, les situations fonctionnant sur l'ostension, où les concepts de géométrie sont déclarés, sans appui sur une situation adidactique.

Dans ce chapitre, après avoir repris les éléments cités dans des recherches antérieures concernant l'ostension, seront précisés les caractères que nous lui attribuons pour la rendre constructive et justifiée par rapport à certains aspects de la théorie des situations. Ces critères étant dégagés, les deux chapitres suivants illustreront cette ostension maîtrisée : l'un sur le travail autour des patrons de solides ; l'autre consacré à l'étude des propriétés élémentaires de la symétrie axiale.
Nous espérons ainsi établir comment l'ostension basée sur une utilisation pertinente du caractère spatial des objets de travail permet d'entrer dans une certaine approche de la géométrie.

Plan du chapitre

I. Synthèse d'éléments de recherches antérieures

Nous allons reprendre dans cette partie quelques éléments d'analyse exposés par des chercheurs dans des travaux en didactique, en les organisant de façon personnelle et synthétique, de sorte à faire rapidement apparaître les aspects utilisés par la suite dans nos réflexions et analyses.
Ainsi se dégageront dans les trois paragraphes suivants, le fait que l'ostension est un acte de déclaration concernant des savoirs ; s'effectuant avec certaines caractéristiques concernant les rapports des élèves avec le milieu ; induite en partie par des contraintes fortes liées au contexte scolaire.

1. L'ostension est un acte de déclaration

Commençons par une citation de U. Eco[1] :

> « L'ostension a lieu quand un objet ou événement donné, produit de la nature ou de l'action humaine (intentionnellement ou inintentionnellement), fait parmi les faits, est "sélectionné" par un individu et désigné pour exprimer la classe des objets dont il est membre. »

Les classes des objets étudiés ici correspondent ou bien à un objet mathématique, ou une notion, une propriété géométrique, ... L'individu qui sélectionne est le maître. La définition de U. Eco peut se contextualiser au cadre didactique ainsi :

L'ostension a lieu quand le maître choisit un objet ou un événement, dans le milieu de l'élève, et l'utilise comme signe, pour déterminer et exprimer à l'élève, une certaine classe d'objets à laquelle le maître sait que cet objet appartient.

Il s'agit d'un acte de déclaration, concernant une connaissance de géométrie, dont le but est de la préciser (la décrire ou définir, ...) de sorte que les élèves la comprennent et l'apprennent.
C'est un processus de « sélection », pour reprendre le terme de U. Eco. Or dans une sélection, des choix sont faits, plus ou moins pertinents pour atteindre le but fixé. Des variables entrent en jeu dans ces choix, qu'il faut maîtriser. Ce sont des variables didactiques ou d'autres types de variables ; toutes, nous les qualifierons de *variables de sélection.*

---

[1] ECO U. (1992) *La production des signes,* Livre de poche, Librairie Générale Française pour l'édition française, Indiana University Press.

Dans des recherches antérieures, en didactique, ce sont essentiellement les aspects négatifs de l'ostension qui ont été retenus, dans la mesure où ils ne semblaient pas permettre un apprentissage : il ne suffit pas que le maître montre pour que l'élève apprenne.
Reprenons par exemple la citation de H. Ratsimba-Rajohn[2] utilisée dans le travail de D. Fregona :

> « Nous partons de l'idée que l'ostension est une conséquence nécessaire de la conception qui considère une connaissance comme seulement, voire exclusivement, un système d'affirmations : règles, procédures, algorithmes, méthodes, procédés, définitions ... »

L'ostension est précisée ici avec l'idée qu'elle se justifie par une considération des connaissances uniquement comme connaissances déclaratives.
S&B reprennent cet aspect dans leur caractérisation d'une présentation ostensive des savoirs spatio-géométriques :

> « Ils n'apparaissent pas comme des outils pour résoudre un problème proposé aux élèves. Aucune place n'est faite à une approche a-didactique qui les aiderait à identifier l'apport du savoir mathématique à la maîtrise du réel.
> Le milieu matériel auquel s'applique la connaissance est absent, il est remplacé par un autre milieu, symbolique, sans que l'enseignant soit en mesure de s'assurer que, pour les élèves, le concept visé fonctionne de la même manière à propos des deux milieux. » (p166)

Ces auteurs mentionnent à la fois la non prise en compte d'une hypothèse de travail (psychologique, didactique, épistémologique) dans l'apprentissage des connaissances ; à savoir qu'elles sont aussi des outils pour résoudre des problèmes (spatiaux ou géométriques) ; cela est occulté dans une présentation ostensive.
Contrairement à une opposition entre empirisme et constructivisme, comme cela a pu être interprété parfois, cette remarque pointe nous semble-t-il deux aspects distincts des connaissances, en jeu dans les apprentissages : *un aspect déclaratif, et un aspect opératoire.*

a) Connaissances de base, connaissances pour résoudre des problèmes

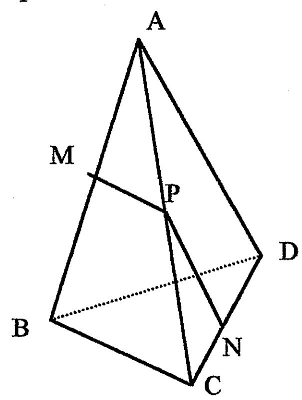
En effet, on apprend des connaissances à la fois dans des situations de base, pour lesquelles on pourra les expliciter, les formuler ... et dans des situations de recherche, de

[2] RATSIMBA-RAJOHN H. (1992) *Contribution à l'étude de la hiérarchie implicative. Application à l'analyse de la gestion didactique des phénomènes d'ostension et de contradictions,* Thèse, Université Rennes I.

résolution de problèmes, en les utilisant dans des problèmes complexes pour lesquels elles sont les outils appropriés et efficaces.

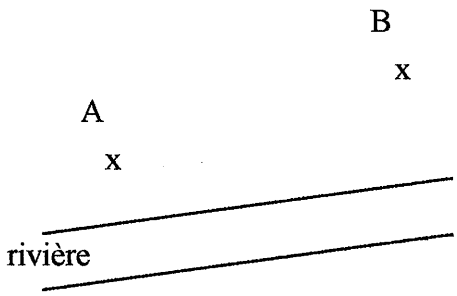
Par exemple :
Apprendre que « la droite intersection de deux plans sécants est parallèle à une autre droite dans chacun des plans, ces autres droites sont donc parallèles entre elles et déterminent un plan sécant des deux plans et parallèle à leur intersection »[3] c'est à la fois comprendre cette propriété, et aussi apprendre à l'utiliser (ou apprendre qu'elle est utile) pour résoudre un problème de section de tétraèdre comme ci-dessous[4] :

> ABCD tétraèdre ; M, N et P situés sur [AB], [CD] et [AC], tels que (MP) parallèle à (BC) et (PN) parallèle à (AD) ; déterminer et dessiner sur une figure donnée la section du tétraèdre par le plan (MNP).



Par exemple :
Apprendre que la symétrie conserve les longueurs, c'est à la fois, l'apprendre sous forme déclarative (avec différents niveaux de formulation, suivant le niveau de classe) et aussi apprendre que cette connaissance est utile pour résoudre un problème de plus court chemin.
Le problème du pompier[5] par exemple :

> Des pompiers, situés en A, doivent éteindre un incendie qui a lieu en B. Ils ont besoin d'aller chercher de l'eau dans une rivière. Cherchez le chemin le plus court qui conduit les pompiers de A vers B en passant par la rivière.



b) L'illusion de la transparence

[3] Pour des formulations de théorèmes exprimant cette situation, voici ce que l'on peut proposer : « Soient deux plans P et P' sécants selon une droite D, si d est une droite de P parallèle à D, tout plan contenant d et coupant P' le coupe suivant une parallèle d' à d. » ; ou « Soient deux plans P et P' sécants selon une droite D, un plan Q est parallèle à D si et seulement s'il coupe P et P' suivant des droites parallèles à D. »

[4] SORTAIS Y. et R. (1988) *Géométrie de l'espace et du plan,* Collection Formation des enseignants et formation continue, Ed. Hermann, p9.

[5] Repris de *Travaux géométriques en 6ème*, A. Kuzniak et C. Taveau, Ed. Nathan, p76.

D'autre part dans la citation de S&B, un autre aspect est sous-jacent : les variables de sélection pour l'acte de déclaration peuvent être fixées de telle sorte qu'elles établissent une rupture entre le domaine de fonctionnement de la connaissance visée, et le domaine de fonctionnement du contexte dans lequel elle est formulée. L'illusion générée par l'ostension est alors de croire que cette rupture est transparente, ... et pour reprendre la citation de T. Bautier[6] :

> « L'ostension (...) consiste en l'utilisation, dans une situation d'enseignement, de la capacité supposée de l'élève à percevoir certains objets et l'illusion que le fait qu'il les ait perçus est porteur d'une connaissance intellectuelle générale et précise. » (cité p87 dans D. Fregona)

c) Questions

- Comment s'articulent les deux types de situations, situations d'ostension pour formuler des savoirs, et résolutions de problèmes, pour l'apprentissage des notions élémentaires ?

- Comment fixer de façon pertinente les variables de sélection pour une ostension constructive ?

2. Les interactions des élèves avec le milieu

La pratique ostensive se décrit donc ainsi : le maître montre aux élèves ce qu'il y a à voir et à comprendre et les élèves doivent appliquer, utiliser ces éléments pour les apprendre et se les approprier.
C'est une ostension que S&B qualifient « d'assumée » et « d'active » ; dans l'optique des anciens programmes de l'école, elle était liée « à la réalisation d'actions, de mesurages effectifs, et apparaît ainsi comme un moyen légitime d'introduction des savoirs spatio-géométriques pour les élèves ... »[7] .

A partir des années 80 l'accent institutionnel est mis sur *l'activité* de l'élève, l'élève *au centre des apprentissages*, l'élève *découvreur*, ... S&B décrivent comment les pratiques sont restées ostensives malgré tout : le maître crée une situation qui rend les élèves actifs par

---

[6] BAUTIER T. (1988) *Une modélisation didactique des activités d'enseignement des premières propriétés de la symétrie orthogonale plane*, Séminaire de Didactique et d'Informatique, LSD IMAG, Université J. Fourrier, Grenoble.

[7] p164.

rapport à une recherche, et les rend producteurs de connaissances plus ou moins élaborées ; lorsque ces connaissances ne correspondent pas à la connaissance visée par l'enseignant, celui-ci fait *malgré cela* porter le travail dans la mise en commun et la synthèse sur cette connaissance visée, effectuant ainsi un saut, une rupture entre ce qui est travaillé par les élèves et ce qui finalement est officialisé[8].
L'ostension est alors un procédé (ou phénomène ?) utilisé par l'enseignant pour transmettre la connaissance visée, mais elle est déguisée sous le masque d'une situation didactique de recherche.

> « ... Nous devons nous interroger sur l'effet produit sur les élèves moyens et faibles par ce procédé qui consiste à laisser du temps à la classe pour résoudre le problème mais à priver les élèves de la mise à l'épreuve de leur solution par la présentation rapide de la solution officielle, celle qui permet d'apporter au problème la réponse attendue par le maître. » (S&B p171)

La question suscitée par les remarques précédentes est la suivante : Quel est le lien entre l'ostension et les interactions des élèves avec le milieu objectif des situations proposées ?

- Ou bien ce milieu objectif est l'évocation d'un milieu matériel avec lequel l'élève n'a pas été dans un rapport effectif. En général en effet, malgré les anciens programmes, le travail sur l'arpentage, les mesures de terrains, ... ne se pratiquaient que sur dessins, c'est à dire des schématisations de problèmes spatiaux qui n'avaient pas pris sens pour les élèves. Et nous avons vu au chapitre concernant l'usage des dessins en géométrie, que cela était toujours le cas. La modélisation ou la schématisation inhérente à la résolution d'un problème, qu'il soit géométrique ou spatial, est prise en charge dans l'activité, avec l'illusion de compréhension des ressorts de ces processus de conversion.

- Ou bien le milieu objectif est un milieu matériel avec lequel l'élève est en contact, dans lequel la connaissance est réalisée, et on la déclare en supposant qu'elle est transparente pour les élèves. Mais on ne peut pas réellement parler de rapport effectif avec le milieu, dans la mesure où il n'y a pas d'action de la part de l'élève sur ce milieu.

- Ou bien le milieu objectif, effectif ou évoqué, et la tâche sont tels que les élèves peuvent agir sur ce milieu, ils peuvent faire des choix, ils sont en recherche, mais les connaissances entrevues au cours de cette recherche sont éloignées des connaissances visées par l'enseignant qui détourne donc l'activité et les résultats de la recherche au profit

---

[8] Cette ostension est désignée par S&B comme « ostension déguisée ».

de la mise en évidence (ostensive) de ce qu'il visait comme apprentissage au cours de l'activité.

3. Les contraintes des situations didactiques

S&B le soulignent et cela est repris par D. Fregona comme une conjecture :

> « L'ostension est une réponse adaptative [...] aux contraintes de la relation didactique. » (p88)

Ces contraintes qui pèsent sur les enseignants permettent en effet d'expliquer le recours à des pratiques ostensives (contraintes d'avancée du temps didactique, contraintes matérielles, gestion de la classe ...)
Les enseignants cherchent les outils les mieux adaptés pour, en le moins de temps possible et de manière la plus efficace possible, transmettre des savoirs, et permettre aux élèves de se les approprier. Mais l'ostension permet-elle un apprentissage efficace et opératoire ? Permet-elle l'usage ultérieur des connaissances dans des situations non didactiques et à quelles conditions ? Cela n'est pas certain.
C'est pourquoi il est important de maîtriser l'ostension, afin qu'elle ne soit plus un phénomène, mais puisse être un procédé contrôlé, qui réponde à des exigences de travail des enseignants, dans certaines circonstances à déterminer.
Une question qui restera ouverte, est celle du choix et de l'articulation entre l'utilisation didactique de l'ostension et des situations de recherche (situations problèmes), relativement à quelles notions, relativement à quels élèves, ... ? Dans les chapitres suivants nous regardons particulièrement les patrons de solides et la symétrie axiale ; et uniquement sous l'angle d'une approche ostensive.

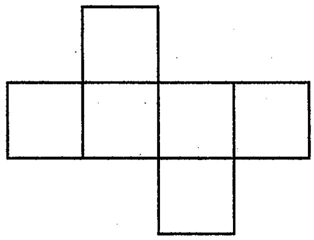
Poursuivons la clarification de ce qu'est l'ostension dans le cadre didactique, avec quelques exemples, avant de clarifier les principes qui seront les nôtres pour les analyses à venir.

II. Deux exemples pour préciser

Les deux exemples choisis portent sur le même thème pour une comparaison constructive ; il s'agit de l'introduction de la notion de patron de solides[9].
Nous regardons pour l'analyse : les objets du problème (objets du milieu matériel, mais aussi au sens métaphorique objet d'apprentissage du problème) ; les actions de l'élève sur le milieu objectif ; et ce qui est déclaré à propos des connaissances visées à travers l'activité.

1. Premier exemple : une ostension « assumée »

Considérons l'activité suivante[10] :



« Découpe le patron jaune suivant les contours ;
plie en suivant les traits noirs ;
colle les faces avec du ruban adhésif ;
tu as construit un cube. »
(Des illustrations accompagnent les différentes étapes du texte.
Le patron est dessiné et coloré sur papier cartonné d'une fiche à découper du manuel de l'élève.)

Les éléments du milieu objectif : la fiche cartonnée, avec le dessin du patron et des ciseaux.
Ce sont les objets du milieu matériel, il n'y a pas d'éléments relevant de connaissances, ...
Les actions de l'élève sur ces objets : découpage, pliage, et collage.
L'objet d'apprentissage de l'activité : la notion de patron
Ce qui est déclaré sur cet objet : rien. Seul élément déclaré « tu as construit un cube », concerne l'objet final obtenu après les actions. (C'est pourquoi l'objet d'apprentissage est ambigu, porte-t-il sur le cube, sur le patron ... ?)[11]

Imaginons cependant que dans le livre du maître, il y soit précisé : « on retiendra avec les élèves : un dessin à plat qui permet de reconstruire après découpage, pliage et collage, un solide, s'appelle un patron du solide obtenu. »

---

[9] Nous étudierons dans le chapitre 3B d'autres situations d'introduction, en particulier celle qui paraît la plus pertinente, à partir de la construction de solides.

[10] Extraite de la collection Diagonale CE1, Math en flèche, Ed. Nathan, p81 livre de l'élève.

[11] Dans le livre du maître cet exercice arrive à la fin d'activités sur le cube pour lesquelles beaucoup d'informations sont données, mais concernant cet exercice spécifiquement, rien n'est dit.

Voici *une déclaration (définition) en extrapolation.* Intéressante, car elle permet de donner des références correctes de la notion, mais en étant éloignée du travail effectif de l'activité, puisqu'il ne s'est fait que sur un seul dessin, un seul solide bien connu, ...

Ou bien « le dessin suivant permet de construire un cube, en découpant son contour, et en pliant suivant les traits noirs. On dit que c'est un patron du cube. »
Voici *une déclaration (définition) en réduction.* Elle donne un nom générique à un objet particulier, c'est uniquement une introduction de vocabulaire, et aucun élément de définition de ce qu'est un patron n'est donné. Le travail relèverait plutôt d'une connaissance liée au cube qu'à la notion de patron. Il serait alors illusoire de croire que cette déclaration correspond à l'objectif d'apprentissage.

Ainsi dans ce qui est déclaré, *ce qui est déclaré* est important à regarder de près, en fonction du contexte de travail.
Par exemple si dans la classe le maître fournit une grande variété de dessins, concernant différents solides, et qu'il propose aux élèves la même tâche que précédemment (découpage, pliage, collage), alors la définition en extension aura un impact plus grand, et l'invisible sera un peu plus visible du fait de la multiplicité des dessins utilisés.
Puisque les actions de l'élève ne portent que sur du découpage, pliage, collage, le maître pourrait proposer des patrons de prismes, des patrons non usuels de pyramides, de solides tronqués, ... dont la variété et la nouveauté rendrait la définition mieux cernable.
L'ostension serait alors assumée, et constructive, car les variables de sélection fondamentales (ici le type de dessins choisi, leur nombre et les solides de référence) seraient fixées pour assurer une pertinence de déclaration ; avec, non pas l'assurance, mais un moindre leurre, sur la compréhension et l'appropriation par des élèves des apprentissages visés.

2. Second exemple : ostension « déguisée »

Considérons l'activité d'« habillage de solides »[12] :

> « ... Prends un cube dans le matériel de la classe et une grande feuille de papier. Tu vas chercher à « habiller » le cube en découpant cette feuille. Pour cela, tu dois le recouvrir, sans trou ni chevauchement. Il faut que « l'habit » soit en un seul morceau. »
> Dans le livre du maître p257 il est précisé :
> « Expliquer ce que signifie « ni trou, ni chevauchement » et préciser que les « contours » doivent se trouver le long des arêtes. »

---

[12] Extraite de la collection Nouvel Objectif Calcul CE2, Ed. Hatier, p144 livre de l'élève.

Les éléments du milieu objectif : le cube, les feuilles de papier, l'idée d'habit, et les contraintes « d'habit sans trou ni chevauchement ».
Les actions des élèves sur ce milieu : laissées au choix et à l'initiative des élèves
L'objet d'apprentissage de l'activité : la notion de patron
Ce qui est déclaré sur cet objet :

- en amont dans la consigne, « c'est un habit d'un solide sans trou ni chevauchement ».
- en aval dans la mise en commun, on peut lire dans le livre du maître

  « Quels habits correspondent bien à la consigne ? Rappeler les contraintes, pas un trou, pas de chevauchement, un seul morceau. Conserver les habits corrects. Expliquer que cet « habit » s'appelle un patron. »

  [En fait, les précisions déclaratives apportées relatives à cette leçon se trouvent à l'étape suivante, dans la rubrique « Conclure avec les enfants » :]

  « Les patrons d'un cube ou d'un parallélépipède rectangle sont des représentations, à plat en un seul morceau, de ce polyèdre. Si on referme un patron, on construit le polyèdre. » (p262)

Remarquons avant toute chose la tentative et la volonté des auteurs de préciser une définition de l'objet d'apprentissage et des critères pour qu'elle soit opératoire ; contrairement à l'exemple précédent, et aux choix des auteurs dans les autres collections de manuels en général.
Remarquons également, comme différence avec l'exemple précédent, que le patron n'est pas donné, il faut le construire. Les élèves peuvent faire des choix dans leurs actions sur le milieu. Et d'autre part, pour ces choix, les auteurs placent dans le milieu des éléments permettant d'effectuer des rétroactions. Ce sont les arguments concernant l'absence de trou, et de chevauchement dans l'usage des feuilles de papier autour du cube.

Ainsi la situation se présente comme une situation de recherche, pour laquelle les élèves sont dans un rapport effectif avec un milieu matériel et le milieu objectif.

L'aspect déclaratif des apprentissages y est assumé. Cependant la définition proposée fait référence à des objets en contradiction avec les éléments d'une définition adaptée, et en cela, la situation nécessitera de la part du maître une intervention ostensive (déguisée) pour aboutir aux objectifs fixés.

En effet la métaphore de l'habit peut prêter fortement à confusion. Les habits, dans la vie courante, se mettent les uns sur les autres ; ils sont en relief et non plans, ils sont larges et leurs contours ne se trouvent pas le long de nos lignes, ... ; donc ils se chevauchent et ne correspondent pas exactement à nos formes. Cette métaphore utilise une référence à un objet spatial, courant, quotidien, dont les caractéristiques ne correspondent pas aux caractéristiques de l'objet spatio-géométrique correspondant ; et les arguments pour valider ou invalider une proposition n'auront pas de poids face à cette image beaucoup plus forte.

Ensuite en ramenant les bords de même longueur d'une feuille A4 les uns sur les autres (comme un cylindre où les cercles sont collés suivant un diamètre), avec le cube pris à l'intérieur du papier, on constitue un « enrobage » du cube sans trou ni chevauchement, en un seul morceau, « habit » qui répond bien à la question. Le seul argument pour invalider cette proposition serait la précision fournie dans le livre du maître : « les contours doivent se trouver le long des arêtes », mais non incluse dans le milieu objectif, au travers de la consigne (à moins que le maître ne le précise).

Ainsi, dans les deux cas, les arguments de validation, mis dans le milieu par les auteurs ne sont pas suffisamment forts pour faire poids contre les dérives de la métaphore utilisée, ou les procédures « à côté » correctes des élèves. Cela entraînera un nécessaire décalage entre l'activité effective des élèves, et les choix faits par l'enseignant lors de la mise en commun ou de la synthèse. Alors la seule façon de retenir les « bons habits » qui seront déclarés « patrons » sera l'ostension, malgré tous les choix faits.

3. L'ostension : vers un procédé didactique maîtrisé

Dans le premier exemple précédent, l'ostension est utilisée pour une déclaration de type définition qui ne repose pas sur un rapport effectif de l'élève avec le milieu lui permettant de s'approprier cette déclaration.
Dans le second exemple, l'ostension est utilisée pour une déclaration qui repose sur un rapport effectif avec le milieu, mais les variables de sélection sont mal fixées pour éviter une rupture entre l'activité effective des élèves et ce qui en sera conclu.

Voici quelques choix qui nous semblent importants à retenir pour pratiquer une ostension constructive. Peut-être n'est-ce plus le terme ostension qu'il faut utiliser car trop connoté maintenant, mais un autre terme pour définir le procédé didactique dont nous allons parler. Pour notre part nous conserverons ce terme.

- **Rapport effectif avec le milieu objectif**

Attention, « effectif » est à entendre au sens des actions effectuées par les élèves sur le milieu, impliquant des choix de la part des élèves, et une certaine réflexion, consciente ou non.

- **Les connaissances visées sont intégrées au milieu objectif de la situation**

La recherche porte en fait sur une appropriation des connaissances visées. Celles-ci doivent donc être clairement formulées préalablement au travail d'appropriation.

- **Les rétroactions sont assurées par les éléments déclaratifs liés à ces connaissances.**

Les rétroactions du milieu sont sur la base d'arguments déclaratifs intégrés au milieu lors de la consigne, par le maître, constituant déjà des éléments d'une déclaration future des connaissances visées pour l'apprentissage.

Afin de voir fonctionner les trois éléments retenus précédemment pour l'analyse, examinons dans le paragraphe suivant le dispositif d'apprentissage autour des sections du cube mis en place par M-P. Rommevaux[13].

---

[13] ROMMEVAUX M-P. (1997) *Le discernement des plans : un seuil décisif dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle,* Thèse, Université L. Pasteur, Strasbourg I, Ed. IRMA.

Sauf mention contraire, les citations faites dans le paragraphe II sont extraites de cet ouvrage.

III. Réflexion autour d'un dispositif

L'intitulé du travail de thèse de M-P. Rommevaux (par la suite notée MPR) est « le discernement des plans : un seuil décisif dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle ».

Après une étude approfondie de la question de l'usage des représentations planes en géométrie de l'espace, elle s'est intéressée à la mise en place d'un dispositif autour du cube permettant aux élèves d'apprendre à « voir dans l'espace ». Voir, c'est à dire à la fois être capable de se représenter l'objet, de discerner des plans sur l'objet, de changer de point de vue, ... et aussi raisonner c'est à dire mettre en œuvre des outils théoriques, des théorèmes de géométrie, pour effectuer des déductions, des cheminements justificatifs ou démonstratifs.

> « Un apprentissage de la géométrie tridimensionnelle suppose, à un moment donné du cursus scolaire, un enseignement spécifique destiné à apprendre aux élèves à discerner des plans sur une représentation en perspective. Nous avons émis l'hypothèse que pour atteindre cet objectif il nous fallait construire une séquence d'enseignement centrée sur la coordination des différents types de représentation : représentations tridimensionnelles, représentations bidimensionnelles – en perspective ou sections planes issues de la situation spatiale – et langage naturel indispensable à la coordination et aux raisonnements. » (p5-6)

L'activité principale située au cœur du dispositif mis en place est la suivante :
un texte fournit des informations sur la position de trois points situés sur trois arêtes distinctes d'un cube. Le problème porte sur la détermination de la forme de la section du cube obtenue par le plan défini par ces trois points. Il s'agit pour les élèves de déterminer cette forme selon trois points de vue :

- en la dessinant sur la maquette transparente d'un cube de 5 cm d'arête mis à disposition des élèves tout au long du travail ;
- en la dessinant en vraie grandeur sur une feuille de papier ;
- en la dessinant sur une représentation en perspective cavalière fournie aux élèves.

> « ... comparer les variations représentationnelles sur l'objet et sur l'une de ses représentations est l'un des enjeux de l'enseignement proposé. » (p145)

Cinq feuilles de travail sont proposées successivement aux élèves (annexe 1a), pour lesquelles la position des trois points varie, de sorte que l'évolution didactique de ces feuilles porte sur la « complexité des tâches cognitives de sélection des plans pertinents et permet le réinvestissement des propriétés et procédures découvertes [au fur et à mesure]. »

Avant d'entrer dans l'analyse de cette activité, nous allons dans un premier paragraphe dire quelques mots de la phase antérieure à ce travail, que MPR appelle « phase exploratoire », indispensable à l'entrée des élèves dans cette activité, leur compréhension et leur prise en charge, phase que nous pourrions aussi appeler « de dévolution du problème ».

1. « Phase exploratoire », dévolution du problème

En premier lieu, « l'expérience de la pomme de terre » :

> « Une pomme de terre est coupée d'un coup de canif, les deux surfaces vives appuyées sur un tampon encreur et la section plane imprimée sur une feuille. Après avoir fait constater que les deux empreintes sont les mêmes, la section plane est imprimée de part et d'autre d'une feuille et la pomme de terre reconstituée emprisonnant le plan : il s'agit de frapper les imaginations en donnant suffisamment de « brio » à l'expérience ; la remarque « souvenez-vous de la pomme de terre » est alors plus efficace qu'un long discours. » (p146)

C'est ce que nous pouvons appeler une « démonstration visuelle »[14], pour une précision claire des objets du travail à suivre, il s'agit de les définir à partir d'une expérience.
Les élèves sont dans un rapport effectif indirect ; même si eux-mêmes ne réalisent pas l'expérience, ils en intègrent l'image, et pourraient la reproduire.
Le spatial est utilisé pour matérialiser un objet géométrique, une section, la rendre visible à l'œil, dans des conditions les moins particulières possibles, afin que les élèves extrapolent le concept en jeu. Cette expérience est nécessaire à la fois pour les mathématiques sous-jacentes (notion de plan dans l'espace ...), et à la fois pour préciser une partie des tâches qui suivront.

De même pour une activité proposée ensuite aux élèves :
ils disposent de la maquette d'un cube et de dessins de polygones évidés sur des feuilles cartonnées (annexe 1b). Ils doivent se prononcer (et motiver leur choix) pour déterminer si ces polygones peuvent correspondre à des sections du cube. La consigne exacte est « Pouvez-vous obtenir, en « coupant » le cube, le polygone évidé ? ».

> « Les élèves ne réalisent pas toujours spontanément ce plongement et essaient de « coller » les gabarits contre les faces, montrant ainsi que, pour eux, seuls les plans des faces existent. Cette expérimentation nouvelle pour eux est très déstabilisante : certains élèves, après la surprise causée par la découverte, par exemple, d'une section trapèze non rectangulaire, veulent que

---

[14] Le mot « démonstration » ne renvoie pas à sa signification mathématique mais au sens courant de « action de montrer » (Petit Robert). Nous l'avons préféré au mot « monstration ».

toutes les formes soient sections et le pentagone régulier subit alors quelques dommages. D'autres élèves résistent à cette déstabilisation en refusant même d'essayer certaines formes, ou en produisant des réponses proches d'antilogies : « NON – il rentre malgré les difficultés. » » (p181)

Les objectifs de cette activité relèvent en partie du souci de mieux faire visualiser aux élèves ce que peut être une section de solide ; tout comme l'expérience de la pomme de terre, mais dans un autre contexte. Ici la section elle-même n'est pas matérialisée, elle est virtuellement présente ; par contre le plan qui la contient est matérialisé par la feuille cartonnée.
Il s'agit aussi de déstabiliser quelques conceptions arrêtées ou erronées, de ce que peut être une section de cube, et de déjouer certaines intuitions fausses.

« Après ces activités les élèves commencent à apercevoir la richesse des figures planes contenues dans les solides, leur variété, l'existence d'autres directions de plans que celles matérialisées par les faces. » (p183)

Ainsi ces connaissances qui ne sont pas des connaissances géométriques, et ces expériences, font maintenant partie du milieu de référence, pour la situation didactique à venir.

Remarquons également dans l'activité précédente que les élèves sont dans une problématique pratique pour laquelle la validation provient de la réussite ou non à encastrer le cube dans le trou de la feuille cartonnée. Cette validation n'en est en fait pas une, puisqu'on peut « s'arranger » avec la feuille cartonnée pour obtenir un résultat positif, ou bien rester dans le doute dans le cas d'une infaisabilité (problème d'habilité ou infaisabilité démontrable ?). Ainsi la réelle validation provient du maître qui annoncera après la recherche que tel polygone est en effet ou non une section du cube. Et il n'aura pas de moyen de le justifier puisque les arguments adaptés sont l'enjeu des apprentissages à venir. La situation didactique qui suit peut alors être introduite comme un travail permettant de saisir (comprendre) ces choses « étonnantes » (des sections « bizarres ») à partir des connaissances qui constitueront ces arguments.

Il nous semble en conclusion de cette phase exploratoire que l'ensemble de ces activités proposées constitue une bonne dévolution d'un rapport à un milieu. Rappelons cette phrase importante dans le travail didactique : « Ce qui est dévolu est bien un rapport à un milieu »[15].

[15] G. Brousseau (1988)

Cette dévolution n'est bien sûr pas terminée, elle se poursuit tout au long des activités suivantes, que nous allons maintenant examiner.

2. Interactions avec le milieu dans la phase de recherche

C'est la phase appelée par MPR « phase de traitement figuratif ».

Cinq feuilles différentes sont proposées successivement aux élèves, dont nous ne reprenons pas l'exposé (voir annexe 1a), parmi lesquelles nous repérons trois niveaux d'interaction.
Une interaction qui permet de résoudre entièrement le problème à partir des observations faites sur la maquette. Le contrôle de tous les côtés de la section est global, le milieu matériel fournit de lui-même la réponse : il suffit de relier les trois points, la section correspond au triangle formé par les trois points (c'est la situation de la feuille 3 du dispositif).
Une interaction qui permet un contrôle partiel des éléments de la section et des plans en jeu, et nécessite l'intervention de connaissances de géométrie pour résoudre (feuilles 4, 5 et 6 du dispositif).
Une interaction qui ne permet plus le contrôle partiel, et nécessite un changement de rapport à l'espace et aux objets du milieu pour la résolution (feuille 7).
Développons les deux derniers niveaux.

Dans les feuilles 4, 5, et 6

Les points sont situés de sorte que certains côtés de la section ne sont plus accessibles directement. *Il devient nécessaire d'utiliser des connaissances de géométrie,* par exemple :

- la propriété « un plan coupe deux plans parallèles selon deux droites parallèles », de façon à pouvoir représenter la section sur les différents supports (objet, vraie grandeur et représentation en perspective).

> « Nous comptons sur *la transparence de l'objet* **pour suggérer** le parallélisme des intersections, de deux faces parallèles par le même plan. Il suffit de coordonner vision et tracé [...]
> Il faut **confirmer** aux élèves que les plans parallèles coupés par un même plan déterminent des droites d'intersection parallèles... » (p158)

Le milieu est donc un milieu allié qui suggère les connaissances que l'on veut institutionnaliser comme des savoirs : c'est un milieu pour l'ostension.

- Remarquons cependant que pour représenter la section sur la représentation en perspective cavalière, il est nécessaire de connaître une des caractéristiques de cette perspective : la conservation du parallélisme ; en utilisant également la connaissance évoquée ci-dessus, qui facilite le tracé de la section.

- On pourrait aussi tracer les sections en n'utilisant que les relations d'incidence ; à ce moment là, il faudrait « sortir du cube » dès la feuille 4.

MPR met l'accent sur les opérations cognitives impliquées dans le dessin de la section en vraie grandeur :

> « ... nous voudrions insister sur les objectifs de la tâche *construction en vraie grandeur de la section*, qui ne s'impose pas par son contenu mathématique mais par les opérations cognitives qu'elle implique. [...] C'est elle qui va imposer aux élèves le recours à la maquette et son exploration : essayer **d'entrer** dans le cube pour y *voir* des plans non matérialisés, et [...] essayer de **sortir** du cadre de référence pour résoudre le problème.
> [Tandis que] la détermination par le raisonnement de la section et son dessin sur une représentation en perspective parallèle ne demandent aucune de ces opérations cognitives de **détermination** et de **coordination** de plans qui sont pourtant essentielles dans la plupart des problèmes de géométrie tridimensionnelle. » (p163)

- Pour le dessin en vraie grandeur, il est également nécessaire de savoir que les longueurs des côtés (que l'on peut facilement déterminer) ne suffisent pas à déterminer la forme d'un polygone de plus de trois côtés. Pour construire la section il faut donc par exemple aller chercher une autre longueur, celle d'un segment joignant deux sommets non consécutifs du polygone section. Pour cela il faut se placer dans de nouveaux plans (distincts des faces du cube) pour la considérer comme longueur d'un côté d'un triangle rectangle, ou la diagonale d'un rectangle, par exemple ... et utiliser des informations utiles.

<u>Dans la feuille 7</u>

Les trois points sont situés de telle sorte que les éléments du milieu, connaissances comprises, ne suffisent plus pour résoudre.

Pour ce qui est du dessin sur l'objet nous pouvons à la limite marquer la section globalement sur l'objet en positionnant le cube assez loin de soi, pour visualiser dans un alignement les deux côtés (donnés sur deux faces consécutives) et faire pivoter le cube pour marquer sur les autres faces des traits dans ce même alignement (ou dit autrement, si on place le cube de sorte que la section soit perpendiculaire au « plan du regard » alors la section se projette en une droite).

Mais pour le dessin en vraie grandeur ou sur la représentation en perspective il nous manque des éléments. Nous ne pouvons plus prendre d'indices spatiaux contenus dans le milieu et les connaissances vues précédemment ne suffisent plus.

Nous sommes alors amenés à faire intervenir un argument géométrique portant sur l'intersection de deux droites de la section, située à l'extérieur du cube. Il est nécessaire d'entrer dans une autre problématique, pour laquelle c'est le travail sur le dessin qui va permettre d'avancer pour obtenir plus d'informations.

3. Des principes didactiques à retenir

Suite à la feuille 4, l'expérience, l'observation, amènent à émettre une hypothèse forte sur le parallélisme des droites intersections du plan de section avec deux faces parallèles du cube ; la connaissance est issue de l'observation, de la manipulation, et confirmée en tant que savoir mathématique par le maître. Le fonctionnement didactique relève de l'ostension maîtrisée, où la variable transparence de la maquette est fondamentale pour assurer cette maîtrise.

> « Les activités proposées sont axées sur ***la nécessité des règles*** : celles-ci ne doivent pas être abstraites du constat des résultats de leur application sur des représentations comme cela est fait dans la plupart des manuels mais **leur pertinence doit s'imposer dans l'exploration des objets, maquette et figures, qui sont manipulés.** » (p143) (en gras c'est nous qui soulignons)

D'autre part les connaissances dégagées suite au travail sur cette feuille font maintenant partie du milieu objectif du problème, car institutionnalisées ; elles font partie du milieu comme nouveaux moyens de résolution et de validation.
Le travail sur les feuilles 5 et 6 constitue en quelque sorte une phase de familiarisation avec l'utilisation de ces connaissances.

> « La réalisation de ces dessins [de la section sur l'objet] met souvent en œuvre des règles de géométrie tridimensionnelle qui, énoncées au moment de la correction, permettront de justifier ou de découvrir certains tracés ultérieurs, puis de démontrer les résultats trouvés : **apparaissant ici comme des règles d'action elles prendront au fur et à mesure de leur institutionnalisation le statut de règles déductives.** [...] Au fur et à mesure de la progression, ces « explications » ou « descriptions d'opérations » devront se transformer en démonstration et quelquefois *précéder* les tracés. » (p153)

C'est le cas dans la feuille 7 où le travail sur papier va permettre de produire en vraie grandeur le dessin de la section.

Dans chacun des trois niveaux d'interaction le rapport au spatial est différent :

Il est une référence et fournit une réponse ; puis il résiste mais c'est encore un appui sur le visuel qui permet de suggérer la solution ; et ensuite il résiste complètement, et doit être dépassé.

> « [Les élèves] peuvent alors prendre conscience, après la relative facilité d'exécution de la première feuille [la 3], des difficultés d'appréhension de l'espace tridimensionnel. **La présence des objets va à la fois les *rassurer*, ils ont l'impression de pouvoir s'appuyer sur des éléments « concrets », mais aussi les *agacer* car ce « concret » résiste**. Un des mérites, insoupçonné au départ, de ce travail a été de montrer que tout ne pouvait pas se faire sur les objets et que le recours à *l'abstraction* était souvent utile pour résoudre des problèmes très matériels. » (p160)

Ne serait-ce pas l'entrée dans une problématique géométrique qui est suggérée ici ?

> « Il est important de remarquer que les passages tâche mathématique – tâche cognitive se font dans les deux sens : la maquette ne livre pas directement la réponse, c'est la demande mathématique qui va guider le choix des éléments à sélectionner sur la maquette et ensuite la réalisation du dessin matériel ou mental [...] qui va permettre la détermination de la longueur manquante. » (p159)

Avec une autre suggestion fondamentale à retenir, l'articulation **dialectique** entre le spatial et le géométrique, même dans une problématique géométrique.

4. Un autre exemple

Citons un autre exemple d'expérience spatiale et de manipulations, où l'ostension est maîtrisée pour permettre l'émergence de connaissances de géométrie. Il est extrait d'un entretien réalisé avec F. Colmez[16], c'est donc lui qui parle ici :

> « A propos de parallélisme, c'est plus ou moins une notion première pour les élèves, même dans l'espace. Il y a des moyens de leur faire prendre conscience des conditions pour que deux droites soient parallèles.
>
> Voici une situation que j'ai expérimentée dans des classes de différents niveaux. J'ai réalisé cette situation à différentes échelles avec des élèves d'âges différents : avec les plus jeunes il vaut mieux travailler à une grande échelle ; avec les plus grands on peut passer à une échelle plus petite.

[16] Entretien réalisé en mai 1998, au laboratoire DIDIREM de l'IREM de Paris 7 (annexe 2).

On tend un fil entre un mur et le sol, ou entre deux planches de bois fixées perpendiculairement. Un autre fil est fixé au sol par une extrémité et on veut fixer l'autre extrémité au mur pour qu'il soit parallèle au premier.

Un moyen de contrôle proposé par les élèves : il y a un endroit où on ne doit voir qu'un seul fil.

Autrement dit ils prennent conscience que deux droites parallèles doivent être dans un même plan.

Puis, si cette condition est réalisée, il faut qu'en même temps elles aient l'air parallèles quand on les regarde autrement, et puis finalement qu'elles aient l'air parallèles quelle que soit la direction dans laquelle on les regarde.

Si elles sont bien dans un même plan et qu'elles ont l'air parallèle quand on les regarde d'une autre manière, alors elles restent parallèles dans toutes les directions.

Cette simple manipulation là permet de prendre conscience de ce que sont deux droites parallèles dans l'espace.

On peut *ensuite* la traduire en termes géométriques et on aboutit à une définition habituelle des droites parallèles. Mais c'est quelque chose que les élèves ont besoin de construire, et si une définition est donnée a priori, cela ne sert à rien.

C'est surtout vrai avec les enfants les plus petits, ils ont une autonomie bien plus considérable que les plus grands, on ne leur impose rien. Et pour qu'ils prennent conscience d'un phénomène, qu'ils l'acceptent intellectuellement, il n'y a pas d'argument d'autorité qui joue. Ils ont besoin de découvrir et de construire par eux-mêmes. »

IV. Conclusion

Reprenons l'idée générale à retenir de ce chapitre :

L'ostension peut être un procédé didactique maîtrisé permettant une déclaration par le maître de connaissances ou de savoirs de géométrie, déclaration appuyée sur des manipulations et expériences spatiales, des élèves ou du maître, relatives aux concepts en jeu.
Les connaissances et savoirs ainsi déclarés, font alors partie du milieu objectif avec lequel l'élève va interagir, lui permettant ainsi d'avoir des moyens de contrôle de ses actions sur ce milieu.

Nous pourrions dire pour le formuler très rapidement, que l'ostension maîtrisée permet une institutionnalisation initiale des connaissances visées au final d'une situation d'apprentissage. L'ostension pour être efficace doit répondre à certaines contraintes : des variables de sélection bien fixées, des rapports effectifs des élèves avec le milieu, et de fait, une évidence d'appréhension pour les élèves des connaissances qui sont déclarées. La formulation de ces connaissances retenue pour l'institutionnalisation peut être en décalage avec les formulations issues de l'activité des élèves, du fait que le maître les situe dans le domaine géométrique ; mais on évite la rupture entre connaissances mises en jeu dans l'action et connaissances visées.

Pour une ostension maîtrisée, le maître a volontairement créé un milieu qui comporte les connaissances visées et il le gère comme tel. A d'autres moments, il donnera l'occasion aux élèves d'utiliser dans une situation adidactique les savoirs introduits par ostension et de les transformer en connaissances pour agir sur cette nouvelle situation.
C'est pourquoi ce procédé s'articule avec d'autres formes de situations d'apprentissage, et en particulier les situations didactiques issues de situations fondamentales.
Les concepts en jeu, les élèves, les contraintes didactiques, les niveaux de classe, ... sont autant de paramètres à considérer pour déterminer si à tel moment, dans telles conditions, ce procédé sera ou non efficace.
Sans pouvoir prendre en compte tous les paramètres, mais en nous limitant à ceux que nous pouvons maîtriser, deux notions font l'objet dans notre travail d'une étude détaillée : les patrons de solides, et la symétrie axiale.

Dans les deux chapitres suivants, nous illustrons et développons notre point de vue sur l'ostension en prenant appui sur ces notions qui paraissent pertinentes pour l'examen. Y sont présentées, au niveau de l'école élémentaire, différentes situations où nous ferons fonctionner le processus d'ostension maîtrisée, de manière distincte, avec des objectifs distincts :

- Le chapitre 3B s'intéresse aux situations d'introduction des patrons des solides, où cette notion est introduite de manière ostensive (au sens où nous l'avons définie) ; ainsi qu'à une situation d'articulation entre expérience effective et expérience mentale pour l'apprentissage de certaines propriétés spatio-géométriques liées à cette notion.
- Le chapitre 3C est consacré à la formulation de quelques propriétés géométriques de la symétrie axiale, dans le cadre de situations d'observation et d'argumentation utilisant le spatial de manière ostensive (au sens où nous l'avons défini).

CHAPITRE 3B

EXEMPLES POUR UNE OSTENSION MAÎTRISÉE DANS LE CADRE DE L'ÉTUDE DES PATRONS DE SOLIDES

Pour notre réflexion sur l'articulation du spatial et du géométrique dans l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire, les patrons de solides sont un bon outil d'étude. En effet, solides et patrons de solides sont des objets matériels, pour lesquels des connaissances de géométrie peuvent être utilisées pour décrire l'un et l'autre, bien que l'on ne dispose pas au niveau de l'école élémentaire de définitions géométriques de ceux-ci.

On dispose d'une définition opératoire d'un patron de solide : *c'est un dessin, en un seul morceau, où toutes les faces du solide sont représentées, juxtaposées les unes aux autres, permettant après découpage du contour et pliage suivant les segments, de reconstituer le solide.*
A la fois objet de l'environnement graphique, et objet matériel de l'espace sensible (en évolution au moment du passage entre dessin et solide), il se définit par une expérience spatiale de manipulation.
Cette expérience en général doit être intériorisée pour résoudre les problèmes spatiaux faisant intervenir des solides. Elle doit l'être également dans la plupart des activités proposées aux élèves à tous les niveaux de la scolarité concernant les patrons de solides. Articuler patrons et solides, dans la lecture des propriétés des deux objets, pour leurs constructions, ou plus généralement pour passer de l'un à l'autre, nécessite un certain nombre de connaissances qui relèvent à la fois du spatial et du géométrique, et ne peuvent *se déclarer* autrement qu'en ayant recours à des manipulations ; une déclaration ostensive, où l'ostension s'appuie sur des expériences que l'on peut rendre effectives pour les élèves, et pour lesquelles les choix sur les variables de sélection et l'analyse a priori doivent être pertinents pour en assurer la maîtrise en tant que procédé didactique.
L'étude de quelques propositions de travail fait l'objet de ce chapitre.

Dans un premier paragraphe, nous formulerons les connaissances sous-jacentes à l'articulation patrons - solide[1] en jeu dans les activités proposées à l'école élémentaire.
Ensuite nous étudierons quatre exemples, dans trois paragraphes distincts :

- un premier exemple d'activité permettant d'établir *la fonction du patron*, « on peut fabriquer des solides en volume à partir d'un dessin à plat ».

[1] Nous nous limiterons dans tout le chapitre aux solides polyèdres.

- Deux autres exemples pour *définir ce qu'est un patron de solide* et mettre en évidence deux points : « il y a plusieurs de ces dessins possibles pour un même solide », et « n'importe quel dessin ne convient pas, même vérifiant les conditions minimales de nombre et formes des faces ».
- pour le troisième exemple, la définition d'un patron étant supposée déjà établie, le travail porte sur *des connaissances permettant de prévoir* si un dessin convient ou non pour être patron d'un solide.

Plan du chapitre

I. Explicitation des connaissances en jeu autour des patrons de solides

En consultant les manuels de fin de cycle 3 concernant les activités autour des patrons de solides[2], il apparaît à leur lecture des propriétés liées à l'articulation des propriétés du patron en tant que dessin et des propriétés du solide, rarement formulées dans les manuels scolaires. Or ce sont ces propriétés qui fournissent en général des arguments de validation d'une réponse, et l'adoption d'un point de vue plus géométrique et moins spatial sur les objets du milieu. Nous allons les formuler[3] dans ce paragraphe.

Rappelons en premier une définition envisagée pour la notion de patron de solide :

Un patron de solide est : un dessin, où toutes les faces du solide sont représentées, toutes juxtaposées les unes aux autres, permettant, après découpage du contour et pliage suivant les segments, de reconstituer le solide en volume.

Pour l'adjacence des faces sur le patron, on peut utiliser plusieurs mots : faces juxtaposées, assemblées, accrochées, jointes par les côtés, avec refus cependant du mot « collées », car le collage ne peut se faire en juxtaposant, mais en superposant des parties.

Un solide a plusieurs patrons.

Pour les autres éléments de synthèse qui suivent nous avons choisi de prendre appui pour les illustrations sur le patron classique du cube « patron en croix ». Il nous semble en effet que les propriétés pouvant être plus ou moins complexes et assez inhabituelles à formuler pour les enseignants et les élèves, il est préférable d'alléger la charge d'actions à faire dans sa tête pour bien se les représenter. Nous utilisons donc le caractère prototypique de ce patron.

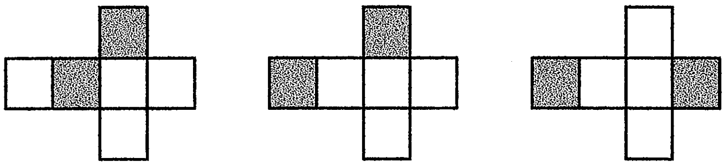
Relations d'incidence (de positionnement) concernant les faces :

[2] Cf. Chapitre 2B, annexe 1, paragraphe « Activités sur les patrons de solides ».

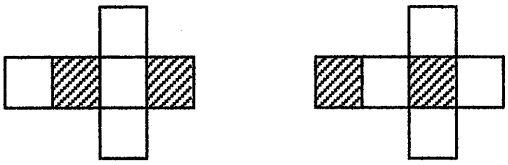
[3] Ces connaissances sont explicitées ici dans un vocabulaire adapté à la classe. Ce sont les formulations que nous proposons en formation initiale ou continue.

Deux faces adjacentes sur le patron sont toujours adjacentes sur le solide.
Mais attention deux faces qui ne sont pas l'une à côté de l'autre sur le patron peuvent être des faces adjacentes sur le solide, ou peuvent ne pas être adjacentes sur le solide.

Par exemple les faces colorées sur chacun des patrons sont des faces adjacentes sur le solide.



Par contre les faces hachurées sur ces patrons ne sont pas juxtaposées sur le solide.



Le choix de donner plusieurs exemples est volontaire, pour ne pas limiter la vision à un cas pour lequel les élèves pourraient prendre d'autres indices que ceux pertinents pour ce qui est dit.

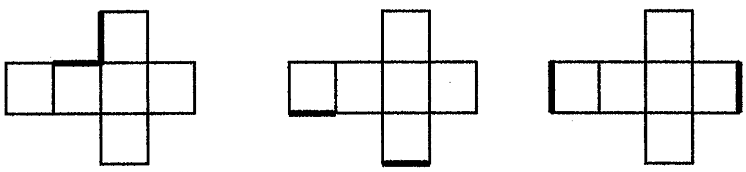
On peut également formuler ces propriétés en partant d'une lecture sur le solide et non sur le patron comme nous l'avons choisi précédemment. Cela donnerait par exemple :
Deux faces adjacentes sur le solide peuvent être adjacentes sur le patron, ou ne pas l'être.
Par contre deux faces non adjacentes sur le solide ne peuvent jamais être adjacentes sur le patron.

Relations d'incidence concernant les arêtes :

Un segment commun à deux faces sur le patron est une arête du solide.

Mais on peut aussi avoir deux segments sur le patron qui correspondent à une même arête du solide.

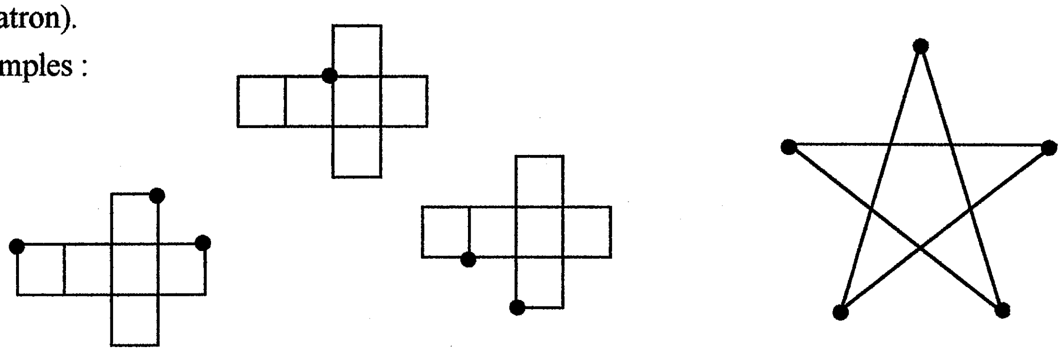
Par exemple j'ai repassé sur chacun des patrons des segments qui correspondent à une même arête du solide



Ici aussi, on pourrait partir du solide et dire :
Une arête d'un solide peut être représentée une ou deux fois sur un patron du solide.

Relations d'incidence concernant les sommets

Un sommet du solide peut être représenté par un ou plusieurs points sur le patron.
(ou dit plus familièrement, un sommet du solide peut être situé à un ou plusieurs endroits sur le patron).
Exemples :



La pyramide et un patron classique de celle-ci sont choisis pour faciliter la prise de conscience d'une généralisation du fait qu'un sommet d'un solide peut être représenté *beaucoup de fois* sur un patron.

Ces connaissances sont en jeu dans les activités proposées en général aux élèves, elles sont très rarement formulées, et pourtant elles permettent d'avoir des repères qui peuvent faciliter, améliorer, faire progresser, dans la capacité à remonter un patron en volume dans sa tête, et à lire sur les patrons des propriétés du solide[4].

Examinons maintenant dans les paragraphes suivants des propositions de travail permettant de viser certaines de ces connaissances de façon plus ou moins directe, propositions didactiques basées essentiellement sur le mode de l'ostension.

---

[4] En annexe 1, le lecteur trouvera des travaux d'élèves d'une classe de CM1/CM2, portant sur cinq tâches faisant intervenir ces compétences, et pourra y lire les réactions des élèves.

II. Appui sur une situation de référence

L'approche proposée dans cet exemple s'appuie sur la fonction principale des patrons de solides : la construction de solides. C'est en effet la raison d'être de ces dessins particuliers. L'activité sur laquelle nous raisonnons constitue une première expérience, l'expérience cruciale, permettant de mettre en évidence *un théorème d'existence : on peut fabriquer des solides en volume à partir d'un dessin à plat.*

Elle se déroule ainsi :

- Une première étape de construction de solides, centrée sur les procédures de construction utilisant des dessins ; la tâche est de construire un solide à partir de dessins réalisés sur papier et de conserver les traces de ces dessins. La mise en commun et la synthèse portent sur la nature des dessins produits. C'est la situation de référence[5].
- Une deuxième étape, la situation d'apprentissage, où l'activité porte exclusivement sur la production de dessins d'un certain type, défini à partir de la situation précédente[6].

1. Descriptif de la situation de référence[7]

La tâche pour les élèves est de construire un cube, à partir de dessins (réalisés sur papier quadrillé), en gardant trace des dessins, sachant que la mise en commun portera sur les dessins et non sur l'observation des cubes.

Lors de la mise en commun, les productions des élèves sont organisées par le maître au tableau de façon à définir des caractéristiques communes aux propositions :

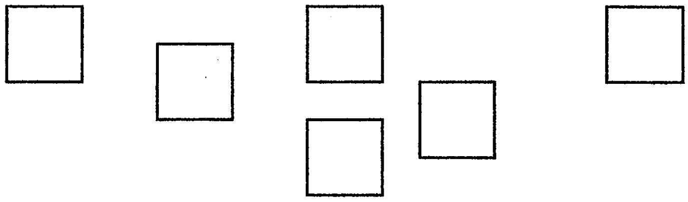
- Les travaux relatifs à une procédure de construction des faces *individuellement*, les carrés isolés, séparés

---

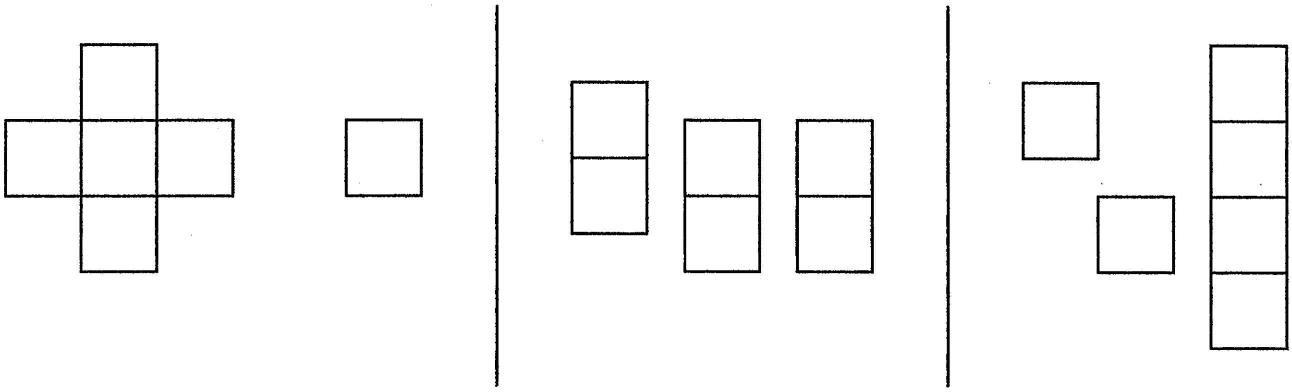
[5] La tâche de la situation objective correspond à la construction de solides. La situation objective est confondue avec la situation de référence si le matériel dont disposent les élèves est le même dans les deux situations (papier, ciseaux, colle, scotch, instrument de géométrie, papier quadrillé). Elle diffère si le matériel est constitué aussi de pailles, pâte à modeler, matériel d'assemblages, car alors les procédures ne seront pas nécessairement des procédures utilisant des représentations à plat.

[6] Rappelons que la structuration du milieu est un emboîtement ; ainsi la situation d'apprentissage est l'ensemble des étapes, et non pas la donnée de la deuxième uniquement.

[7] Nous nous appuyons ici sur l'observation d'une séance dans une classe de CE1, au cours de travaux avec des professeurs des écoles stagiaires.



- Les travaux relatifs à une procédure de construction de faces, *certaines isolées et certaines juxtaposées par un côté*



- Les travaux relatifs à une procédure patron ne sont pas apparus dans la classe observée de CE1, mais pourraient apparaître dans un autre contexte. Si elle apparaît, elle serait caractérisée par le fait que *toutes* les faces sont juxtaposées.

La mise en commun de ce genre de séance porte sur ce qui est visible au niveau des différentes procédures des élèves, en relation avec l'objectif d'apprentissage : la juxtaposition ou non de certaines faces. La synthèse pourrait être :
« Il y a des dessins des faces où toutes les faces sont isolées (séparées) ; il y a des dessins où quelques faces sont déjà juxtaposées (assemblées, attachées) par un côté ; il y a des dessins des faces où toutes les faces sont juxtaposées [si quelques patrons apparaissent]. »

2. Description de la situation d'apprentissage

La situation d'apprentissage peut maintenant se constituer à partir de la situation de référence, du milieu objectif qu'elle a généré, autour de la tâche suivante : « Réaliser des dessins (qui permettent de construire un cube) où *toutes* les faces sont juxtaposées. »
Ce qui est donc déclaré pour lancer l'activité est la donnée des conditions de réussite de la tâche : l'élève doit pouvoir savoir s'il a réussi ou non. Cela concerne la notion de patron : ce doit être un dessin, toutes les faces du solide doivent être dessinées, elles doivent toutes être accrochées les unes aux autres, le découpage et pliage du dessin doit redonner en volume le

solide. Cela est déclaré à la fois au travers des éléments mis en place dans la situation de référence, et de la tâche à réaliser dans cette situation.

La mise en commun porte à la fois sur les difficultés rencontrées dans le travail de recherche et sur les objets de production de la recherche.
Les difficultés peuvent concerner :
- la construction des faces (difficulté indépendante du problème posé, elle relève plutôt de la mise en commun de la situation précédente) ;
- le positionnement des faces les unes par rapport aux autres (difficulté directement liée au problème posé de construire un patron). Puisque c'est la difficulté envisagée comme nœud du travail de recherche, elle est incontournable à formuler dans la conclusion en termes propres à mieux cerner la notion de patron. Il faudra en effet constater avec les élèves que les faces ne peuvent pas être accrochées les unes aux autres n'importe où, pour pouvoir redonner en volume le solide.

Les objets de production de la recherche :
Ce sont les divers dessins produits par les enfants. Le maître n'aura pas attendu la mise en commun pour relancer un élève sur la validation par lui-même de son travail, même si dans la mise en commun il est amené à rappeler les règles de validation, pour une nouvelle validation collective. De même pour la variété des productions.

La synthèse proposée peut être alors :
« On peut construire des solides avec des dessins à plat, où toutes les faces sont dessinées et juxtaposées les unes aux autres. »[8]
Cette formulation correspond à l'établissement d'un théorème d'existence, celle des patrons de solides, et les définit en même temps. Ainsi, le vocabulaire peut alors être introduit, en précisant que *« ces dessins, très particuliers, on les appelle des patrons du solide ».*
Et pour reprendre globalement l'explicitation, contenant à la fois existence, définition et vocabulaire, le maître peut proposer :
« Un patron de solide est un dessin où toutes les faces du solide sont juxtaposées les unes aux autres, pas n'importe où mais à certains endroits, pour que lorsqu'on découpe le dessin et qu'on le plie le long des segments dessinés, on obtienne en volume le solide. »

---

[8] D'autres éléments peuvent également être formulés lors de cette synthèse, mais ils correspondent à des résultats constatés *à l'issue* de l'activité, et non pas internes à la tâche : *« On a vu qu'un solide peut avoir plusieurs patrons » ; « Comme on a travaillé sur le cube, voici quelques patrons du cube ».* Ce sont des compléments à l'institutionnalisation de la connaissance visée dans cette situation ; pour être un objectif d'apprentissage, ils devront faire l'objet d'autres situations spécifiques.

3. Remarques

Les éléments d'institutionnalisation ne sont autres que les éléments définis dans la consigne pour préciser la tâche aux élèves. L'apport nouveau de la synthèse est un apport de vocabulaire, et une reformulation des connaissances en jeu de manière décontextualisée.
L'ostension réside en effet dans cet aspect que nous pouvons formuler de manière plus générale : les connaissances visées sont élaborées suite à une situation de référence dans laquelle certains critères ont été dégagés, et repris pour la situation d'apprentissage en termes de contraintes pour une nouvelle tâche. Ces contraintes font alors partie du milieu de référence, à la fois comme éléments pour délimiter et définir une tâche, et à la fois comme éléments pour argumenter et valider une réponse face à cette tâche ; et comme elles sont en même temps l'objet d'apprentissage, elles constituent le cœur de l'institutionnalisation.

III. Deux exemples pour une définition

Les propositions de ce paragraphe ont pour objectif d'enseignement de définir ce qu'est un patron de solide avec une définition opératoire qui permet de fabriquer des patrons de solides et de décider si un dessin est ou non un patron de solide.
Le premier exemple est une situation de mise à plat de solides construits avec du matériel d'assemblages de pièces en plastique ayant des formes polygonales, représentant les faces[9]. Les élèves manipulent ce matériel pour expérimenter le passage solide - patron, de l'espace au plan ; la définition d'un patron est installée de façon ostensive à la manière décrite dans le paragraphe précédent, à savoir, comme contraintes pour une tâche reformulées en connaissances institutionnalisées.
Dans le second exemple, au contraire, aucune situation n'est proposée aux élèves, le maître montre et déclare ; il manipule avec un matériel fabriqué pour expérimenter le passage patron - solide, du plan vers l'espace, et la définition d'un patron est mise en place suivant un procédé d'ostension classique.

1. Des solides mis à plat pour obtenir des dessins

a) Descriptif[10]

Chaque élève dispose d'un solide (donné par le maître ou construit par les élèves dans une première phase, ou lors d'une activité précédente). Le solide est construit avec du matériel spécifique : des pièces en plastique pleines de forme polygonale possédant un système d'accrochage sur les cotés permettant de construire des polyèdres[11].

« Vous devez déplier le solide de façon à mettre toutes les faces à plat mais en les laissant attachées les unes aux autres. On doit pouvoir reconstruire le solide à partir de ce morceau à plat. »
Les élèves ont tendance au début à démonter le solide complètement en séparant toutes les faces. Puis ils les assemblent ensuite à plat. C'est pourquoi il est important de préciser dans la

---

[9] Plusieurs marques existent pour un tel matériel. Les différences portent sur la nature des formes des pièces proposées, la taille et le système d'accrochage ; voir page de garde de l'annexe 2 – chapitre 1 pour une référence.

[10] Issu d'un travail réalisé en classe de CE2 avec des professeurs des écoles stagiaires. Nous reprenons en partie le texte du document « Mises à plat de solides, construits avec le matériel Polydrons », fiche 4, annexe 2, Première Partie.

[11] Il est important dans cette situation que *une seule* face du solide soit construite avec *une* seule pièce du matériel. Sinon on peut déplier le solide en un seul morceau sans que celui-ci ne soit un patron.

consigne (qui peut être écrite au tableau) que *le morceau à plat doit redonner le solide quand on le replie*. C'est un moyen de validation pour les élèves.
Et cela constitue un élément essentiel d'institutionnalisation. Car l'objectif principal est d'établir une définition d'un patron de solide. En conclusion de cette activité, il pourra être déclaré : *« Une mise à plat[12] d'un solide, en un seul morceau, et qui permet de reconstituer le solide, est appelé un patron du solide. »*

Un autre aspect important de la consigne porte sur la mise en mémoire des mises à plat obtenues ; car un autre élément d'institutionnalisation portera sur l'existence de différents patrons pour un même solide, *« un solide a plusieurs patrons »*.
Ainsi dans la consigne le maître peut proposer :
« Pour garder une trace du morceau que vous obtenez à plat je vous donne une feuille sur laquelle vous repassez son contour, avec un feutre noir. On affichera ensuite au tableau les différentes traces que vous avez obtenues, pour en discuter. »
Remarquons que lorsque les élèves repassent le contour du "morceau à plat", ils n'obtiennent pas de figures géométriques puisque les encoches, les trous pour l'assemblage des pièces apparaissent sur leurs dessins. Soyons bien conscients que cela est peu important pour le moment. Il s'agit de privilégier la notion de patron, la cohérence entre le morceau à plat et la montée en volume donnant le solide[13].

b) Remarques

Le milieu objectif est constitué des solides, construits avec le matériel, des pièces en plastique planes, et des déclarations initiales précisant les contraintes de la mise à plat : elle doit être en un seul morceau ; elle doit permettre de redonner le solide par une montée en volume. Ces éléments sont des moyens de contrôle pour les élèves de leurs actions sur le milieu (ils ont à réaliser ces mises à plat, manipulations, expériences spatiales) ; et ils sont aussi les éléments d'institutionnalisation de l'activité.

c) Quelles sont les variables de sélection pertinentes pour une ostension constructive ?

- **Ce qui est déclaré est à la fois nécessaire et suffisant.**

---

[12] En termes plus mathématiques, nous dirions « un développement plan ».

[13] Si le maître demandait de *reproduire* sur une feuille le "morceau à plat", la tâche de l'élève se trouverait déplacée vers une tâche *de reproduction de figures planes*, et risquerait d'éloigner le travail effectif des élèves des objectifs visés. Si elle est envisagée, ce ne peut être qu'avec des objectifs liés à la géométrie plane en jeu dans ce type d'activité, et sans lien avec les connaissances liées aux patrons de solides.

La contrainte de mise à plat seule serait insuffisante ; car alors la présentation sur la table de toutes les faces séparées serait acceptable, sans être un patron du solide.
La contrainte de mise à plat en un seul morceau serait également insuffisante ; car alors n'importe quel accrochage des faces conviendrait, sans être un patron du solide.
Il est donc nécessaire de préciser une contrainte *de mise à plat, en un seul morceau, qui permet de reconstituer le solide.* Et cette contrainte est suffisante.
Ainsi les éléments fournis dans la consigne sont les éléments de définition d'un patron. Ils sont à la fois éléments de clarification de la tâche, de définition des objets de la tâche, et éléments de validation.

- **L'utilisation d'un matériel spécifique réduit les contraintes des modalités de travail**

Le matériel constitué de pièces en plastique avec son système d'accrochage permet de rendre *effectives* les manipulations de passage du plan à l'espace, mises à plat et montées en volume, avec des contraintes de gestion de temps et de matériel tout à fait raisonnables.
Si les solides étaient indémontables et les constructions à faire sur papier, les dessins eux-mêmes, les découpages, pliages, prendraient du temps à réaliser, risqueraient d'induire d'autres phénomènes ou d'autres problèmes, qui risqueraient de faire dévier la tâche. Cela viendrait en contradiction avec la volonté de faire chercher les élèves, multiplier leurs essais, diversifier leurs productions, ...
Si les solides étaient des emballages à découper, il se rencontrerait surtout un problème d'économie de matériel et de recyclage. Une découpe mal placée, un essai erroné, et c'est un emballage de moins pour la recherche. D'autre part il faudrait préciser le découpage de l'emballage *suivant les arêtes,* sinon on pourrait se retrouver avec un découpage de plusieurs petits morceaux, racolés, ... qui répondent aux conditions sans être un patron du solide ...

En conclusion, le choix du matériel est fondamental pour mener une telle séance de façon économique et constructive du point de vue des contraintes didactiques.
Un mauvais choix empêchera d'atteindre l'objectif visé sans recours à l'ostension classique, comme dans le cas de « l'habillage des solides »[14]. Dans le cas présent, ce serait le matériel, pour la gestion de la recherche des élèves, des essais, du temps de réalisation, ...

Penchons-nous maintenant sur une autre proposition didactique, bien éloignée de la précédente dans son fonctionnement, bien que visant les mêmes objectifs. Ce deuxième exemple est très proche d'une situation d'ostension classique. Il consiste à *faire une déclaration,* de ce qu'est un patron de solide, *avec une certaine mise en scène déclarative,* et à lancer les élèves dans une activité de recherche de patrons de solides.

---

[14] Cf. chapitre 3A.II.2

2. Des dessins pour construire des solides

a) Descriptif

Le maître a sur son bureau un solide, grand format.
« Nous allons travailler aujourd'hui sur une façon particulière de construire des solides : pour vous la montrer, j'ai apporté un solide (en faire la description rapide).
J'ai dessiné ses faces sur un dessin, attachées les unes aux autres par leurs côtés, de telle façon qu'après avoir découpé le contour et plié suivant les segments, j'ai obtenu le solide en volume.
Voici deux exemples de dessins. » (Un exemple de patron avec positionnement classique des faces, et un exemple de patron non usuel, le maître dispose également d'un contre-exemple présenté ensuite).
Le maître fait la manipulation consistant à remonter en volume le dessin où les lignes de plis ont été préalablement marquées. Ainsi le passage du dessin plan au solide en volume est visible. Le maître a pris soin de construire les dessins dans du papier de même couleur et même texture que celui utilisé pour construire le solide. La juxtaposition du solide et de l'objet remonté à partir des patrons doit créer un étonnement, effet important dans la mise en scène. Il reprend :
« J'ai aussi parfois fait des erreurs de positionnement des faces, et par exemple ce dessin là [qui n'est donc pas un patron de solide et constituera un contre-exemple] *ne convient pas : je n'arrive pas à reconstruire le solide. »*
Le maître fait également la manipulation correspondante.
« Donc il faut faire attention, tous les dessins qui contiennent toutes les faces d'un solide ne permettent pas toujours de reconstruire un solide. »
Le maître accroche le solide au tableau (il avait prévu un fil scotché le long d'une arête, assez long, qu'il peut également scotcher au tableau ; ce système permet de rendre mobile le solide tout en maintenant son attache).
Il accroche ensuite les deux dessins patrons du solide, et déclare : « *Les dessins comme ceux-ci, qui permettent de reconstituer le solide, sont appelés des patrons de solides* » et il note au tableau au-dessus des dessins *« exemples de patrons du solide : dessins où toutes les faces du solide sont accrochées les unes aux autres par les côtés, et qui permet de remonter en volume le solide ».*
Il laisse le contre-exemple sur la table.
« L'activité proposée aujourd'hui est la recherche et la construction de patrons de solides. »
Il donne alors la consigne, les modalités de travail et de fonctionnement de cette activité.

b) Remarques

Le descriptif précédent porte sur la première phase (la dévolution) d'une situation d'apprentissage non décrite, juste mentionnée à la fin : le travail sur la construction de patrons.
Contrairement à l'exemple précédent, où les connaissances étaient mises en évidence dans l'articulation entre consignes et institutionnalisations dans le cadre d'une situation d'action pour les élèves, dans cette phase il n'y a pas de situation, pas de recherche ; les connaissances sont déclarées par le maître, c'est lui qui manipule, c'est lui qui montre.
Il montre un solide, des dessins à plat, découpés, pliés, il montre la montée en volume de ces dessins, il montre que certains de ces dessins en volume correspondent au solide, d'autres non. Il montre et il dit. Il dit ce qu'est un patron de solide, il dit des conditions nécessaires, il dit que certaines ne sont pas suffisantes, il dit de rester vigilant.
Voilà en quoi réside l'ostension : le maître réalise lui-même une manipulation, une « démonstration visuelle » qui permet de définir les objets de la tâche ultérieure, et de placer dans le milieu les éléments qui seront les arguments à la fois pour la recherche et la validation du travail des élèves dans la phase ultérieure de construction de patrons.
Tout comme l'expérience de la pomme de terre pour les sections du cube[15], les élèves sont dans un rapport effectif indirect avec cette manipulation : effectif dans la mesure où l'activité proposée à la suite de cette « démonstration » n'est autre que de *la reproduire* en trouvant d'autres patrons ; et rapport indirect car l'expérience est réalisée *par un autre* dans un premier temps. Les connaissances déclarées de manière ostensive par le maître font ainsi partie du milieu objectif de la situation de construction de patrons, dont on peut supposer qu'elle en constitue une situation d'appropriation.

Pour éviter de retrouver dans le procédé les travers de l'ostension classique, le regard sur les variables de sélection est important, et les choix que le maître va faire sont déterminants pour que ce procédé soit efficace, c'est à dire réponde bien à une exigence de clarté visuelle et conceptuelle des éléments déclarés. Quelles sont donc les variables de sélection pertinentes pour une ostension constructive ?

c) Variables de sélection pertinentes pour une ostension constructive

- **Le solide choisi pour la présentation, nature et format**

Ni trop classique, ni trop complexe, ... il est inutile que les élèves le connaissent, au contraire, il doit impressionner les élèves, créer un étonnement.

---

[15] Chapitre 3A, III.1.

Le format, pour une raison de visibilité, ou tout simplement de mise en scène, doit également être pensé suffisamment grand.

- **Les dessins choisis comme exemples de patrons, nature et nombre**

Ni trop classiques, ni trop complexes, … là aussi un effet d'étonnement, de surprise doit être créé ; c'est le cas en particulier si, en voyant le dessin, les élèves ne s'attendent pas à ce qu'il puisse permettre la reconstruction du solide.
La prévision d'au moins deux patrons, permet d'installer déjà l'idée d'une multiplicité des patrons pour un même solide. C'est aussi un moyen pour le maître de relancer la recherche des élèves dans l'activité de construction « il en existe plusieurs … ».

- **La présence d'un contre exemple**

Dans la phase de présentation, il est question de « dessins des faces du solide ». Le contre exemple est nécessaire pour tout de suite souligner une insuffisance de cette définition : la position de ces faces est un élément fondamental de la définition.

- **L'association d'une démonstration visuelle et d'une formulation en mots**

La mise en scène qui prend du temps, se déroule, ici et maintenant, fournit une expérience aux élèves … elle doit être associée à une formulation, orale et écrite sur le tableau, qui prend référence dans cette expérience visuelle.

En annexe 2 se trouve un document utilisé en formation continue, rendant compte de nos choix et matériels personnels.

Bien sûr, nous ne maîtrisons pas tout de ce qui se passera en classe, et d'autres phénomènes seront en jeu, liés à des éléments qui ne relèvent pas du didactique, … Mais les seuls choix que nous pouvons maîtriser, au moins a priori, sont les choix didactiques.

3. Complément comparatif

Les exemples précédents d'ostension constructive, sous réserve de certaines conditions, diffèrent par le rapport des élèves au milieu : le premier est une situation d'action, pour laquelle les élèves agissent effectivement sur l'environnement par l'usage de matériel, pour s'approprier une définition ; le second exemple est une situation d'observation, pour laquelle le maître (et non plus les élèves) agit effectivement sur l'environnement par l'usage de matériel, pour visualiser une définition.
Par contre les mises en scène didactiques dans les deux exemples visent, toutes deux, la mise en place d'une définition opératoire de ce qu'est un patron de solide, pour jouer un rôle de dévolution d'une autre situation qui sera la vraie situation d'apprentissage (comment fabriquer

un patron et comment reconnaître qu'une représentation est ou non un patron ; et non pas dire ce qu'est un patron de solide).

Nous allons examiner comme dernière proposition une situation de reconnaissance de dessins correspondant ou non à des patrons de solides, où le rapport à la manipulation pour les élèves est différent des exemples précédents, et où le maître fait fonctionner l'ostension également différemment.

IV. Exemple où s'articulent expérience spatiale effective et expérience évoquée

1. Descriptif de l'ensemble des étapes du dispositif

Présentation de la tâche des élèves

Les élèves disposent d'une grande feuille format A3 sur laquelle figurent des représentations planes "de type patrons"[16]. Il s'agit pour les élèves de préciser celles qui sont de vrais patrons de solides (qui permettent de reconstruire le solide, en pliant suivant les segments), de celles qui ne sont pas des patrons de solides.
Dans une première étape les élèves disposent du matériel Polydrons pour faire les constructions à plat et les monter en volume. Ainsi leurs réponses se construisent à partir de manipulations effectives.
Dans une seconde étape, les élèves doivent se prononcer dans un premier temps sur les réponses sans disposer de matériel, sans pouvoir effectuer aucune manipulation. Le matériel Polydrons n'est fourni que dans un second temps, pour la validation des propositions.

Les objectifs relatifs à ce dispositif sont :
- Prendre conscience qu'un développement à plat en un seul morceau n'est pas nécessairement le patron d'un solide.
- Mettre en évidence des conditions nécessaires (mais non suffisantes) pour qu'une représentation plane de type patron soit le patron d'un solide :
- même nombre de faces ;
- même nature de face ;
- les faces sont positionnées les unes par rapport aux autres d'une certaine façon.

Objectifs liés à l'articulation des deux étapes

L'objectif principal, qui ne peut se développer que sur le long terme, de ces situations articulées l'une à l'autre, est de faire acquérir aux élèves une expérience, une familiarité avec des déplacements et des objets dans l'espace, en articulant expérience effective et expérience mentale. On pourrait dire : « appendre à voir et manipuler dans sa tête ».
La seconde étape instaure dans sa consigne une nécessité de se représenter mentalement des actions. La première étape est nécessaire pour comprendre la situation, et pour répondre à une

[16] Pour un exemple d'une telle feuille, se reporter à l'appendice de la fiche 5 (Chapitre 1 – Annexe 2 – fiche 5). Le texte de ce paragraphe est extrait en partie de cette fiche, mais réorganisé et complété d'éléments théoriques d'analyse.

hypothèse forte de travail : les images mentales d'objets ou d'actions, se construisent et se structurent de façon analogique aux actions effectives. Une condition nécessaire (mais sûrement non suffisante) est que la familiarité avec la situation effective permet et participe à l'élaboration de sa construction mentale[17].

2. Première étape : la manipulation pour élaborer une réponse

Présentation

Le maître affiche au tableau une copie grand format de la feuille qui sera distribuée aux élèves. Sur cette feuille figurent des représentations "de type patrons" dont certaines sont effectivement des patrons de solides et d'autres non, bien que très proches.
«Chacun va recevoir une feuille comme celle affichée au tableau, sur laquelle il y a différents dessins. Parmi eux il y en a qui sont des patrons de solides et d'autres non. Vous devez indiquer pour chacun si c'est le patron d'un solide ou si ce n'est pas le patron d'un solide.
Pour vous aider vous allez recevoir une boîte contenant les pièces Polydrons. Vous pouvez reproduire un dessin avec les pièces, puis observer si cela permet d'obtenir un solide ou non.
Vous écrirez sur votre feuille sous le dessin "c'est le patron d'un solide" ou "ce n'est pas le patron d'un solide". »

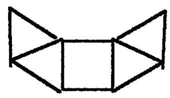
Dans une classe de CE2, un élève a reformulé la consigne de la façon suivante : « On fait les mêmes formes que sur la feuille avec les pièces. Ça doit être des cubes, des pavés, ou d'autres solides. Et il y en a qui ne correspondent pas à des cubes, des pavés, et des solides. »

---

[17] Nous nous référons ici aux travaux dont rend compte M. Denis et à ses analyses dans l'ouvrage « Image et Cognition » (1989, P.U.F) :
« Les recherches sur « l'exploration mentale » de configurations spatiales [...] ont eu pour ambition de saisir quelques aspects de la structure interne des images visuelles. Les conclusions qui en sont issues sont que les images possèdent effectivement une structure interne et que cette structure reflète celles des configurations à partir desquelles elles se sont constituées. » p71.
« En résumé, il apparaît fondé, à l'examen des données, de reconnaître la similitude structurale des évènements psychologiques engendrés par la perception des objets et de ceux qui sont produits par l'imagination de ces mêmes objets. L'image d'un objet reflète bien, dans sa structure, l'organisation interne de l'expérience perceptive de cet objet. Cette analogie au niveau de « l'apparence » est prolongée par l'analogie de certains au moins des processus mis en œuvre pendant l'activité perceptive et imaginative. Les images pourraient ainsi faire l'objet de traitements similaires à ceux qui s'appliquent aux stimulus physiques présents dans le champ perceptif. [...] L'ensemble des données recensées fonde en somme la notion d'analogie, appliquée aux représentations mentales de caractère imagé. » p79.

Remarques sur le travail des élèves

Cette situation pose peu de difficultés aux élèves, une fois la consigne bien comprise. Ils s'engagent généralement bien et avec plaisir dans cette tâche.
Quelques erreurs sont cependant produites :
Utiliser les bonnes pièces en nombre exact mais les disposer différemment que sur le dessin.
Par exemple pour la figure suivante une élève a repéré le carré et les quatre triangles équilatéraux, puis a construit avec ces pièces une pyramide à base carrée. Or la figure fournie n'est pas le patron d'une pyramide à base carrée.



Il se dégage ici un aspect important en liaison avec la notion de patron, qui pourra être repris dans la synthèse : « un dessin constitué des mêmes pièces que les faces d'un solide, n'est pas forcément un patron du solide. Il faut aussi que ces pièces soient *disposées d'une certaine façon les unes par rapport aux autres.* »

Pour les autres erreurs on trouve l'oubli d'une pièce ou la confusion entre deux pièces. Par exemple un dessin contenant un carré orienté de telle sorte que l'élève lui associe une pièce losange non carré. Ou bien confusion hexagone, pentagone, ...

La mise en commun

Il est important pour les dessins qui ne sont pas des patrons de solides de demander aux élèves de donner des arguments qui permettent d'expliquer ce fait. Bien évidemment on ne pourra qu'être sommaire, mais préciser cependant déjà quelques conditions nécessaires : en effet ce qui peut être dégagé dépend des dessins proposées aux élèves, qui permettent ou non de noter ces précisions, c'est une variable de sélection essentielle pour une ostension maîtrisée.

- un patron de solide doit être formé du même nombre de faces que le solide.
- un patron de solide doit avoir les faces de même nature que le solide.
- dans un patron de solide les faces sont placées d'une certaine façon les unes par rapport aux autres, pour permettre de reconstituer le solide.

Synthèse

Elle reprend les différents points cités précédemment, qui maintenant font officiellement partie du milieu, milieu de référence pour la situation d'apprentissage. Cependant il ne faut pas trop tôt institutionnaliser ces remarques. C'est en effet à la suite de plusieurs reprises de cette situation, au cours desquelles ces remarques auront été formulées par les élèves

oralement qu'il s'agira de les mettre par écrit, en tenant compte bien sûr des formulations proposées par les élèves.
Ces connaissances sont maintenant un outil pour déterminer *sans manipulation* qu'un dessin est ou n'est pas le patron d'un solide, et sont des arguments de validation pour dire qu'une figure ne l'est pas.

3. Deuxième étape : agir dans sa tête

Présentation

Le maître affiche une feuille grand format au tableau, sur laquelle figurent les différentes représentations. Il fait référence à la situation précédente déjà vécue par les élèves et demande de repréciser de quoi il s'agit, quelle était la tâche, la consigne, ...
Il annonce ensuite : *« Nous allons reprendre cette situation, vous allez recevoir cette feuille, et vous devez indiquer les dessins qui sont des patrons de solides et ceux qui n'en sont pas. MAIS, cette fois-ci, vous ne disposez plus des pièces pour faire les constructions. Vous devez réfléchir, imaginer, faire les constructions dans votre tête. »*
« Quand vous aurez fini vous indiquerez au stylo pour chaque dessin "c'est le patron d'un solide" ou "ce n'est pas le patron d'un solide", je noterai au tableau les différentes réponses que vous aurez faites, puis je vous distribuerai les pièces des Polydrons, vous ferez les constructions et vous pourrez vous corriger vous-même. »
« Ensuite nous réfléchirons ensemble aux différentes erreurs qui ont été faites, cela nous permettra de dégager certains points importants pour comprendre ce qu'est un patron de solide. »

Une variable didactique importante : le choix des représentations proposées.

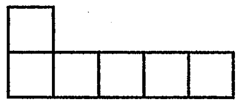
Il est nécessaire de choisir des figures qui engendrent des confusions sans toutefois qu'elles ne soient trop complexes à la lecture.
On peut proposer des patrons du cube, du tétraèdre régulier, de la pyramide à base carrée, du prisme à base triangulaire ; mais il faut choisir aussi d'autres solides : des prismes de bases différentes, des pyramides de bases différentes ...

Mise en commun

Après le moment de validation individuelle, le maître indique au tableau sous la dictée des élèves les réponses correctes pour chaque figure.

La situation et ses variables sont fixées pour qu'il y ait un nombre non négligeable d'erreurs pour un même dessin. C'est alors qu'il faut préciser avec les élèves que c'est une erreur courante, et comprendre « comment se fait-il que l'on soit si nombreux à faire cette erreur ? ». Cela engage la discussion sur les indices pris en considération dans la figure, et ceux non pris en considération.

Par exemple dans une classe de CE2, à peu près la moitié des élèves avait annoncé que la représentation suivante est le patron d'un cube. Comprendre et analyser cette erreur c'est pouvoir dire :



« Ce dessin a bien six faces, carrées, comme un cube. C'est peut-être pour cela qu'on l'a pris pour le patron d'un cube. Or nous avons vérifié en manipulant les pièces Polydrons, ce n'est pas le patron d'un cube. Pourquoi ? Les différentes faces ne sont pas situées au bon endroit pour pouvoir reconstruire un cube. Pour savoir si une représentation est le patron d'un cube, il faut faire attention à la position des faces les unes par rapport aux autres. »

Synthèse

Elle doit se rédiger à partir du vocabulaire et des formulations utilisées par les élèves.
Voici une proposition (virtuelle) :
« Pour savoir à peu près si une représentation plane est le patron d'un solide, il faut faire attention :

- au nombre de faces qui constituent la figure
- à la nature de ces faces
- à la position des faces les unes par rapport aux autres. »

4. Remarques

Dans cet exemple, les connaissances visées correspondent à des *propriétés de constat* d'observations, d'expériences, liées à des manipulations et mouvements d'objets de l'espace sensible et dans cet espace.
Le constat et la formulation première sont tout entiers imprégnés du caractère spatial des expériences réalisées. Pour passer à un point de vue plus géométrique, c'est à dire une connaissance à caractère général, formulée avec du vocabulaire adapté à la géométrie, le maître doit faire évoluer « les mots pour le dire »[18]. Il ne peut le faire de façon légitime qu'en exposant lui-même les mots *qu'il faut*, c'est à dire ceux ayant une reconnaissance institutionnelle, un statut légal dans la terminologie ...

[18] nous entendons « mots » au sens large, recouvrant syntaxe, grammaire, ...

Ainsi le procédé d'ostension s'appuie ici sur l'articulation d'une situation d'action, d'expériences spatiales effectives pour les élèves, permettant de constater et formuler certaines propriétés, et d'une situation de prévision, dans laquelle ce qui a été formulé précédemment peut apporter des informations, des aides ou des éléments d'argumentation, pour répondre à la question. Les élèves sont dans un rapport effectif au milieu objectif dans la situation de référence et dans un rapport évoqué au milieu de référence de la situation d'apprentissage.

V. Conclusion

Les quatre exemples étudiés précédemment étaient présentés suivant les objectifs d'apprentissage. Construction de solides pour établir la fonction d'un patron ; mise à plat de solides ou montée en volume de dessins pour en installer la définition ; reconnaissance de dessins pour en dégager des propriétés.

Ils ont en commun le point suivant, qui caractérise un des aspects du procédé d'ostension :
les connaissances visées sont à la fois spatiales, perceptibles à l'occasion d'une expérience (ou manipulation) dans l'espace sensible ; et déclarées dans un cadre géométrique. Pour une situation d'apprentissage fixée, elles sont intégrées au milieu de référence à la fois comme outils de résolution et arguments de certaines validations.

Par contre ils se différencient suivant la façon dont s'effectue cette déclaration : moment et justification didactique, et interaction des élèves avec le milieu. Sans reprendre dans le détail les éléments d'analyse cités dans les paragraphes précédents, reprenons les grandes lignes :

- Les situations de construction de solides et de mise à plat de solides, sont des situations d'action, de manipulations effectives pour les élèves, pour lesquelles *les connaissances visées sont formulées initialement dans la consigne comme des contraintes pour une tâche, pour être reformulées ensuite comme éléments d'institutionnalisation.*
- La « démonstration visuelle » constitue une mise en scène d'une manipulation réalisée par le maître, où *les connaissances visées sont présentées, formulées, déjà comme des connaissances sous forme institutionnelle.* Les élèves sont dans un rapport effectif indirect au milieu si une situation de reproduction de la manipulation leur est proposée suite à cette mise en scène.
- Dans la situation d'apprentissage basée sur l'articulation entre manipulation et prévision pour la résolution d'une tâche de reconnaissance, *les connaissances visées sont déclarées à l'issue d'observations, de constats faisant suite à des manipulations effectives des élèves, et utiles pour la prévision.*

Ajoutons que dans ces situations les élèves n'apprennent pas seulement ce qu'est un patron de solide, mais apprennent également des connaissances spatiales, liées à l'articulation patron - solide.
Pour les situations de construction et de mise à plat, le moyen de savoir si on a ou non réussi la tâche, ne peut pas être formulé si on ne dispose pas d'une des connaissances visées : savoir ce qu'est un patron. **L'ostension est donc nécessaire pour la dévolution des situations d'apprentissage de ces connaissances spatiales** (dont certaines ont une formulation

géométrique). C'est également la fonction de l'ostension pour l'introduction des patrons à partir d'une « démonstration visuelle ».

Dans la situation de reconnaissance, par contre, **l'ostension est nécessaire pour la constitution d'un milieu pour la validation qui n'est plus l'espace sensible, mais doit relever du géométrique.**

CHAPITRE 3C

EXEMPLES POUR UNE OSTENSION MAÎTRISÉE DANS LE CADRE DE L'ÉTUDE DE LA SYMÉTRIE AXIALE

Relativement à notre problématique d'articulation du spatial et du géométrique, la symétrie axiale offre également, tout comme les patrons de solides, un contexte propice à certaines analyses. En effet au niveau de l'école élémentaire, nous utilisons une approche globale de la transformation, à travers les actions qu'elle exerce sur les figures[1], en référence à une manipulation dans l'espace sensible : le pliage.

Cette manipulation permet à la fois de définir, de construire, de reconnaître, des configurations symétriques. Elle pourrait suffire à la résolution et à la validation de l'ensemble des tâches proposées à l'école élémentaire. Cependant si l'on envisage de « faire de la géométrie » autour de cette notion à ce niveau de la scolarité, l'approche des tâches et des moyens de résolution doit être défini autrement. C'est ce que nous nous proposons de faire dans ce chapitre, et de voir en quoi l'ostension peut être utilisée dans ce but. Auparavant il s'agira de préciser les connaissances géométriques qui peuvent être envisagées comme objectifs d'apprentissage à l'école élémentaire.

---

[1] Dans ce chapitre nous utiliserons indistinctement les mots « figure » ou « dessin », suivant le contexte et les habitudes de formulation en géométrie, que nous conserverons en partie.

Plan du chapitre

I. Explicitation des connaissances en jeu autour de la symétrie axiale à l'école élémentaire

Rappelons que la symétrie axiale comme transformation du plan n'est pas matérialisable en tant que telle, puisqu'elle transforme une image en une image virtuelle. La seule matérialisation du plan, qui ne permet pas de visualiser la transformation mais le résultat final de la transformation d'une image, est l'utilisation de miroirs.
Par contre on peut concevoir la symétrie axiale dans un plan comme la restriction à ce plan d'un demi-tour autour de l'axe de symétrie[2]. Ainsi le passage au spatial permet d'avoir une matérialisation effective de la transformation par référence au pliage. On peut alors définir de manière opératoire ce que signifie « avoir un axe de symétrie » pour une figure ; et « être symétriques par rapport à une droite » pour deux figures données :

« avoir un axe de symétrie »

Quand on plie une figure, si les parties de chaque côté du pli se superposent, on dit que la ligne du pli est un axe de symétrie de la figure.

« être symétriques par rapport à une droite »

Quand on plie le long d'une droite, un dessin avec deux figures, si les deux figures se superposent exactement, on dit qu'elles sont symétriques par rapport à cette droite.

Ces définitions permettent à la fois de construire et de reconnaître des figures symétriques ou possédant des axes de symétrie, en utilisant le pliage avec un contrôle de la superposition (faible opacité du support papier, ou papier calque).

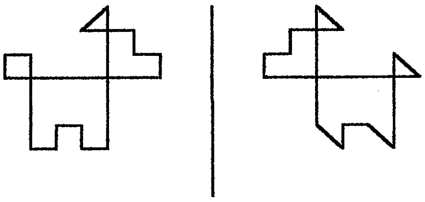
Pour regarder les propriétés géométriques de la symétrie axiale en jeu dans les activités de l'école élémentaire, nous nous sommes inspirée d'un support proposé dans l'une d'elle[3].

---

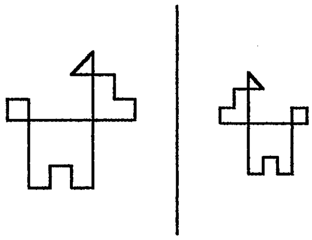
[2] Elle peut aussi être envisagée comme la restriction à ce plan d'une symétrie par rapport à un plan perpendiculaire au plan donné et contenant l'axe. Mais ce point de vue ne fournit pas de définition opératoire utilisable à l'école élémentaire.

[3] Activité de découverte p192, Nouvel Objectif Calcul CM1, livre de l'élève. Nous y avons ajouté d'autres configurations, et considérons une demande d'argumentation, non proposée dans le manuel.

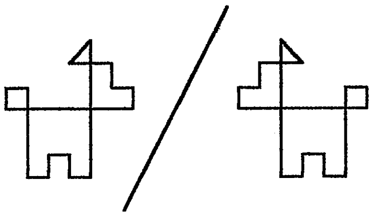
A



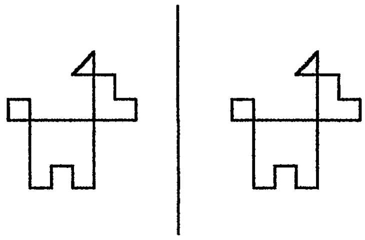
B



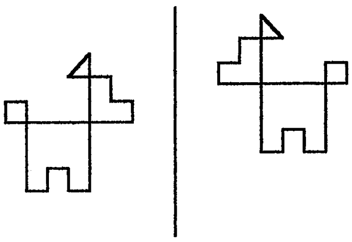
C



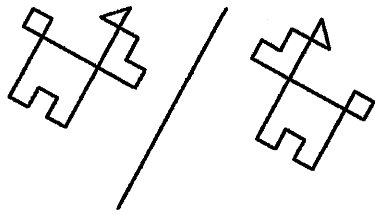
D



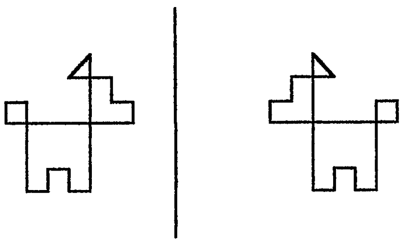
E



F



G



Etant donnée une configuration non symétrique, plusieurs arguments portant sur plusieurs propriétés distinctes peuvent être mentionnés pour justifier de la non symétrie. Mais parmi ces propriétés, il en est une qui est plus prégnante *à la perception* que les autres, et apporte un argument plus « évident », plus rapidement reconnaissable. C'est cette propriété que nous choisissons de formuler pour chacune des configurations précédentes.

La configuration A permet de mettre en évidence la non conservation de la forme au sens de l'allure générale (nature géométrique), et la configuration B permet d'établir une condition nécessaire sur la taille (les dimensions relatives aux grandeurs d'aire et de longueur[4]) ; elles permettent de formuler respectivement les conditions nécessaires suivantes :

Deux figures symétriques par rapport à une droite doivent avoir la même forme.

Deux figures symétriques par rapport à une droite doivent avoir la même taille.

Ces deux propriétés sont des propriétés relatives à toutes les isométries, déplacements et antidéplacements. Elles ne sont pas caractéristiques de la symétrie. Par contre les propriétés suivantes le sont, respectivement mises en évidence par les configurations C, D, puis E et F :

La symétrie se définit par rapport à une droite : il faut regarder à la fois les figures et la position de la droite par rapport à ces figures.

Deux figures symétriques par rapport à une droite doivent être retournées l'une par rapport à l'autre de chaque côté de la droite.

Deux figures symétriques doivent être sur une même ligne perpendiculaire à l'axe.

Cette dernière propriété n'est pas tout à fait *visible*, bien que renforcée ici par le choix des dessins à bords parallèles ou perpendiculaires à la droite, qui accentuent la prégnance de la perpendicularité.

La configuration G met en évidence une propriété relative à l'écart à l'axe des figures, « la distance à l'axe », où la perpendicularité liée à la définition géométrique de cette notion est implicite, mais non prise en compte dans la formulation.

Deux figures symétriques par rapport à une droite doivent être situées à la même distance de la droite.

En annexe, nous rendons compte d'une séance en formation continue sur la symétrie axiale, dans laquelle nous formulons avec les stagiaires les propriétés de ce paragraphe à partir de la situation de reconnaissance de configurations symétriques, activité que nous

---

[4] Bien que le mot « taille » ne soit pas dans le corpus du vocabulaire de géométrie, du fait de l'ambiguïté des grandeurs auxquelles il peut référer, nous le conservons pour sa clarté de compréhension dans ce contexte de travail, et parce que cette ambiguïté recouvre finalement deux propriétés géométriques exactes de la symétrie.

analysons dans le paragraphe suivant ; nous y abordons également la tâche de construction de figures à main levée, étudiée également dans ce chapitre au paragraphe III.

Le paragraphe suivant rend compte de deux exemples d'ostension constructive pour définir ce que sont deux figures symétriques par rapport à une droite et mettre en évidence les propriétés géométriques de la symétrie axiale exposées ci-dessus.

II. Exemples pour une ostension constructive

1. Remarque préalable sur le pliage comme situation de référence

Les tâches de reconnaissance de configurations symétriques et de construction sont les deux seules mentionnées dans les programmes de l'école élémentaire. Elles sont également au cœur des activités proposées aux élèves au niveau du collège.
Il est admis dans divers travaux de considérer pour ces tâches que la situation de définition par référence au pliage, est la situation de référence associée à une situation d'apprentissage autour de ces précédentes tâches.
Pour le processus développé par D. Grenier dans sa thèse[5], dont une partie porte sur « reconnaître si des configurations données possèdent ou non une droite de symétrie », « tracer à main levée ces droites de symétrie dans le cas de leur existence », et « tracer aux instruments des droites de symétrie pour certaines configurations », M-H. Salin et R. Berthelot exposent l'analyse suivante[6] :

> « Le caractère adidactique de la situation d'apprentissage est lié à la capacité d'anticipation d'une activité que chacun sait pouvoir facilement réaliser, le pliage. La détermination de la validité du résultat est inscrite dans le milieu objectif et dans les rapports spatiaux correspondants, maîtrisés par les élèves, sans nécessiter l'intervention du maître. Le fait de pouvoir recourir effectivement au pliage pour vérifier est essentiel, même si on n'y recourt qu'en dernière extrémité.
> Le caractère évoqué concerne :
> - pour la première tâche [de reconnaissance de l'existence ou non d'une droite de symétrie], à la fois le tracé de l'axe, et le contrôle par rapport au pliage.
> - pour la seconde tâche [tracé à main levée de la droite de symétrie] seulement le contrôle par rapport au pliage. [...]
> Le caractère pratique des rapports établis par ces situations est déterminé par le type d'activité auquel fait appel la consigne, que ce soit la reconnaissance visuelle d'une symétrie ou le tracé à main levée d'un trait (droit) reconnu visuellement. [...]
> **Le caractère évoqué ne suffit pas à impliquer une modélisation géométrique.** » (p54)

---

[5] GRENIER D. (1988) *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale en 6ème*, Thèse Université J. Fourier, Grenoble 1.

[6] A propos des deux premières tâches, analyse qu'ils considèrent comme également valable pour la troisième tâche ; chapitre B-4, p52-59.

Tout laisse à croire que : ou bien les élèves ne pensent pas au pliage comme moyen de validation, car peut-être que paradoxalement celui-ci n'est pas suffisamment présent dans le milieu ; ou bien la réalisation du pliage mentalement n'est pas si simple, et ne fournit pas les images attendues pour permettre aux élèves de contrôler leurs actions[7].

En fait les rapports pratiques sont suffisamment prégnants, pour résoudre la tâche perceptivement, et pour faire croire à la non nécessité de recours au pliage. Celui-ci bien qu'évoqué ne joue alors pas son rôle et perd sa fonction d'outil de validation : il n'y a plus de milieu pour la validation. Quand S&B décrivent a priori « la détermination de la validité du résultat est inscrite dans le milieu objectif et dans les rapports spatiaux correspondants, maîtrisés par les élèves, sans nécessiter l'intervention du maître », cela est juste, mais de fait les élèves n'ont pas recours à cette détermination.

Ainsi, ni pour la résolution de la tâche, ni pour la validation, les élèves n'ont une contrainte pour être dans un rapport géométrique aux objets du milieu, ou utiliser des propriétés géométriques.

C'est ce qui est sous-jacent, nous semble-t-il, et justifie, ce que S&B concluent à partir d'une reprise des résultats, remarques, et analyses apportés par D. Grenier :

> « Nous avons montré comment nos catégories nous permettent d'effectuer une analyse a priori que ne semblent pas permettre celles utilisées par l'auteur. Son analyse supposait que s'établirait un rapport de modélisation mais celui-ci n'est pas nécessaire dans la situation. Nous avons dégagé pourquoi il en est ainsi : **les situations proposées déterminent des rapports pratiques, et ces rapports font obstacle à la mise en place de rapports de modélisation lorsqu'un débat est directement articulé sur la situation de référence**. Il faut donc, pour obtenir des élèves une connaissance de la symétrie orthogonale par une modélisation géométrique, soit modifier les situations, soit les adapter à un fonctionnement complètement didactique. » (p59)

« Modifier les situations, ou les adapter à un fonctionnement complètement didactique » ...

Dans le paragraphe suivant, nous détaillons l'activité de reconnaissance de configurations symétriques, en proposant d'en faire une situation de référence ostensive pour institutionnaliser les propriétés de la symétrie axiale, et ainsi modifier le milieu pour la validation d'autres situations d'apprentissage, celui-ci ne reposant alors plus sur le pliage, mais articulé sur l'énoncé des propriétés géométriques de la symétrie.

---

[7] Nous avons en effet souvent constaté, dans des classes où nous avons observé en tant que formateur, que les élèves demandent à ce que le pliage soit effectif pour se convaincre de ce que l'on peut affirmer en référence à celui-ci.

Par contre dans la quatrième partie, la situation « terrain et tige », bien que cela ne soit pas notre propos, est une situation didactique où la référence au pliage reste caractéristique du milieu de validation, mais prend du sens du fait des constructions à réaliser dans la cour de récréation. L'impossibilité de plier est une réalité didactique, crédible pour le problème posé aux élèves.
Dans le paragraphe III suivant, nous examinons également l'activité de construction à main levée, et son milieu de validation.

Mais poursuivons maintenant sur l'étude de deux exemples de situations d'ostension permettant pour la première d'établir des propriétés de la symétrie axiale, et pour la seconde de définir ce que sont deux figures symétriques par rapport à une droite[8].

2. Reconnaissance de configurations[9] symétriques par rapport à une droite

Etant données une configuration et une droite, il s'agit de reconnaître si cette configuration est symétrique ou non par rapport à la droite donnée. La seule tâche de reconnaissance pouvant être résolue par des réponses du type « oui / non », elle doit être complétée d'une demande d'argumentation pour justifier de cette réponse. De quels arguments dispose-t-on pour justifier de la symétrie ou non d'une configuration par rapport à une droite ?

Dans le cas d'un réel problème de géométrie où le domaine de fonctionnement est spécifié, on utiliserait des arguments basés sur les données et déductions de données de l'énoncé (cela relève plutôt d'un travail au niveau du collège). Nous restons pour la suite de l'étude dans le cadre des problèmes spatio-graphiques, spécifiques de ceux proposés à l'école élémentaire.

Le recours au pliage pourrait suffire : « si je plie la feuille le long de la droite, les deux figures (ne) se superposent (pas), donc elles (ne) sont (pas) symétriques par rapport à cette droite ». C'est l'argument le plus élémentaire, il relève d'une problématique pratique, il fournit une validation spatiale.
Mais il est également possible d'user d'arguments géométriques, relatifs aux propriétés de la symétrie axiale, pour valider une réponse.
En effet, si la configuration est symétrique, il faudrait mentionner que l'ensemble des propriétés (même forme, même taille, retournement, perpendicularité et écart à l'axe) sont

---

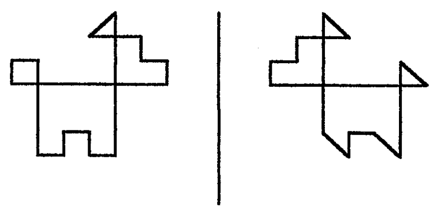
[8] Cet ordre est inverse de l'ordre des apprentissages ; il nous parait plus adapté à l'enchaînement de nos propos. La situation de reconnaissance de configuration faisant l'objet du paragraphe précédent.

[9] Nous utilisons le mot « configuration » pour désigner à la fois l'ensemble formé par deux figures, disjointes ou non, ou la donnée d'une seule figure.

bien vérifiées, ce qui est assez fastidieux, d'autant plus que la perception fournit en général une assurance de validation efficace. Nous considérons donc que pour une affirmation positive du type « ces deux figures sont symétriques par rapport à la droite » l'usage d'arguments géométriques n'est pas pertinent.
Par contre si la configuration n'est pas symétrique, la mention d'une seule propriété de la symétrie non vérifiée suffit comme argument et validation ; par exemple, « les deux figures n'ont pas les mêmes dimensions donc elles ne sont pas symétriques » ... ou ce qui a été mentionné dans le paragraphe I.
L'intérêt didactique réside dans le fait qu'une propriété non vérifiée « cela se voit ». La présence des propriétés visuelles ou spatiales d'une configuration non symétrique, *sans ambiguïté perceptive*, traduit le non respect d'une propriété géométrique de la symétrie axiale, et permet ainsi de la formuler par la négative.

Par exemple voici quelques formulations d'élèves, pour justifier que les configurations exposées dans le paragraphe I ne sont pas symétriques, proposées au cours d'une activité en début de CE2, où le maître avait seulement rappelé la définition par pliage de deux figures symétriques, et proposé ensuite cette activité de reconnaissance :
A : *« Les pattes et la queue du chien n'ont pas la même forme. »*
C : *« L'axe est mal placé. »*
D : *« Le deuxième chien n'est pas dans le bon sens. » ; « Il n'est pas retourné. » ; « Les deux chiens doivent se regarder. ».*
E et F : *« Les chiens ne sont pas en face. » ; « Ils ne sont pas à la même hauteur. »*
Ces formulations portent sur des propriétés visuelles ou spatiales qui traduisent des propriétés géométriques[10]. Nous pouvons alors (ou plutôt le maître peut) faire évoluer ces formulations.
Pour la configuration ci-contre voici les différentes étapes possibles d'une évolution :

- *« Les pattes et la queue des chiens n'ont pas la même forme »*, formulation élève ;
- *« Les chiens n'ont pas la même forme »*, pour une déclaration qui porte sur les figures, dans leur globalité ;
- *« Les figures n'ont pas la même forme »*, pour une formulation décontextualisée ;
- *« Deux figures symétriques par rapport à une droite ont toujours (doivent toujours avoir) la même forme »*, pour une formulation de la propriété comme condition nécessaire.



[10] Elles traduisent en fait l'absence du respect de certaines propriétés géométriques, mais nous préférons à cette formulation longue la formulation utilisée dans le texte. Elle met plus explicitement en liaison l'environnement graphique et le point de vue géométrique. La visibilité des propriétés du fait de leur absence.

D'une manière générale, le maître doit faire évoluer la formulation des propriétés visuelles ou spatiales traduisant l'absence de propriétés géométriques, vers la formulation de ces mêmes propriétés géométriques : à la fois dans le vocabulaire utilisé, le registre de langue, mais aussi dans le passage de la négative (telle chose ne convient pas), à la forme positive de formulation d'une condition nécessaire pour que deux figures soient symétriques.
Ainsi des connaissances de géométrie sur la symétrie axiale peuvent être institutionnalisées, et faire ensuite partie du milieu objectif des diverses situations, en tant que savoirs, comme outil de résolution ou argument de validation.
Remarquons que l'usage, ici, de l'ostension fonctionne bien pour les propriétés qui sont *bien visibles* et pour lesquelles les formulations dans le domaine de la perception visuelle ne sont pas trop éloignées du vocabulaire géométrique adapté. C'est le cas de la forme, la taille, le retournement, la distance à l'axe[11].

C'est pourquoi nous pensons que dans le cadre de la symétrie axiale, le recours à l'ostension est à la fois cohérent dans la mise en évidence des connaissances visées, et explicite relativement à ces connaissances. Pour ce procédé les propriétés géométriques de la symétrie axiale n'apparaissent pas comme des outils pour résoudre un problème posé[12] ; le maître ne crée pas une situation possédant un caractère adidactique. Les propriétés géométriques de la symétrie axiale :

- découlent d'observations réalisées dans le cadre de l'environnement graphique,
- comme reformulation de propriétés visuelles ou spatiales de dessins,
- et sont intégrées au milieu objectif comme des savoirs
- ayant statut d'argument pour invalider des productions dans des tâches de reconnaissance ou de construction de configurations symétriques.

Bien évidemment il s'agira de les rendre opératoires, dans d'autres situations. Le moyen de contrôle des productions ne sera plus tout à fait la référence au pliage ; il le restera pour valider des configurations symétriques, mais sera accompagné de l'énoncé des propriétés géométriques de la symétrie pour argumenter de la non symétrie d'autres configurations.

---

[11] Toutes sauf une : la perpendicularité. Pour celle-ci les formulations des élèves portent sur les figures dans leur globalité (le face à face, la hauteur de l'une par rapport à l'autre), tandis que la perpendicularité relève d'un aspect ponctuel de la transformation ; le décalage, la rupture entre propriété visuelle et propriété géométrique est incontournable, et à assumer.

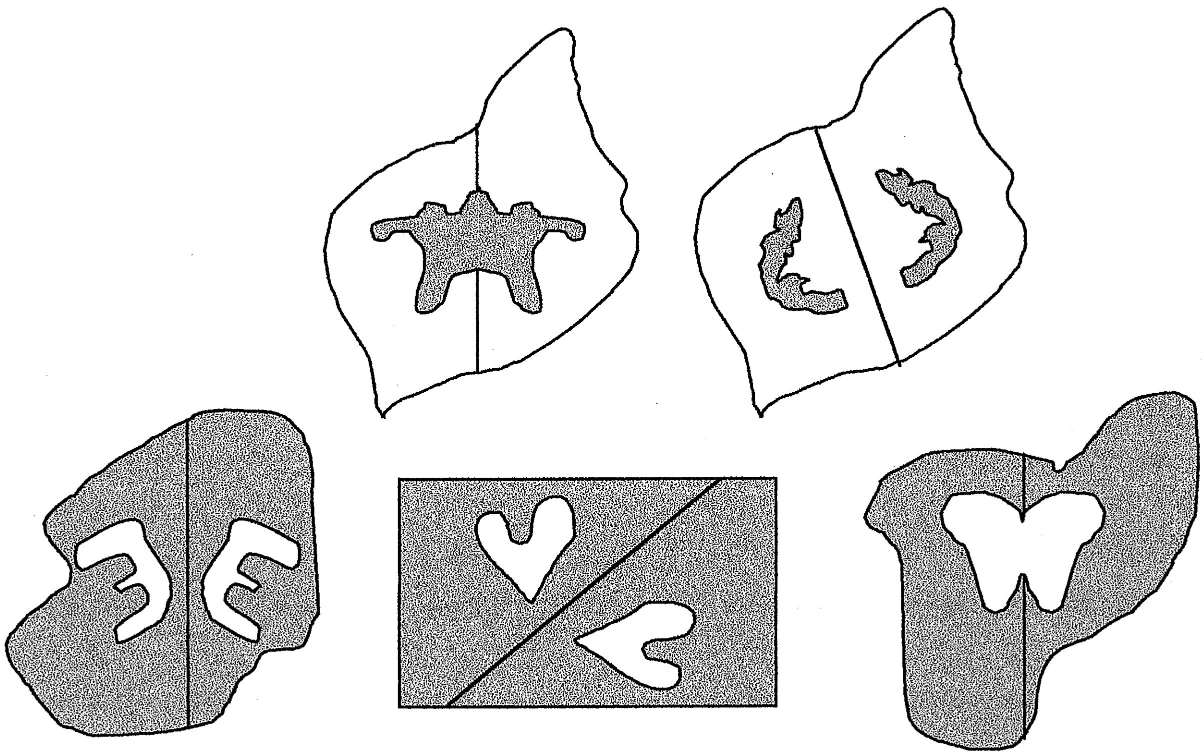
[12] Comme cela peut être le cas pour la situation « Terrain et tige », étudiée en quatrième partie. Même alors, l'étude nous montre les difficultés à passer de l'activité effective des élèves à une institutionnalisation cohérente avec les connaissances qu'ils mettent en jeu.

Ainsi l'ostension sert ici pour la constitution d'un milieu pour la validation d'autres situations didactiques.

Revenons à présent à un moment d'ostension plus classique, pour une situation qui se situerait au cycle 3 mais en amont de la précédente dans le déroulement didactique, à savoir un moment de définition (ou de rappel) de ce que sont deux figures symétriques par rapport à une droite.

3. Ostension pour une définition

A la maternelle et au cours du cycle 2, les élèves ont l'occasion de produire des dessins symétriques à travers diverses activités.
Par exemple les activités de production de tâches de peinture, ou de pliages découpages sont des situations de manipulations définies à partir du pliage.



Pour les taches de peinture, il s'agit de : « Marquer sur la feuille une ligne de pliage, puis ouvrir la feuille. Placer de la peinture sur une partie de la feuille d'un seul côté de la ligne de pli. Replier la feuille suivant cette ligne, et bien appuyer sur l'ensemble. Ouvrir. La production est faite. »

Pour les pliages découpages : « Plier une feuille, puis réaliser un découpage : sans couper un bord de la feuille (on obtient des productions comme les deux ci-dessus de gauche) ; ou en coupant la ligne de pli (on obtient des productions comme celle de droite). »

Ces manipulations mettent en jeu des actions, qui ne font pas intervenir la symétrie en tant que telle. C'est dans le résultat de ces actions qu'elle apparaît, au travers des configurations obtenues. Le mot "symétrie" ou "symétrique" a en général été utilisé pour désigner le résultat de ces pliages ou découpages. L'observation des productions a pu aussi amener à formuler d'autres constats. Par exemple que les deux figures ont la même forme, la même taille et sont retournées l'une par rapport à l'autre.

La situation d'ostension au cycle 3 que nous étudions maintenant est basée sur le même principe que celle décrite pour définir les patrons de solides à partir d'un matériel de « démonstration visuelle ».
Le maître réalise lui-même des manipulations : des pliages de feuilles sur lesquelles se trouvent une droite et deux figures ; et il déclare les connaissances qu'il souhaite établir[13]
« On dit que deux figures sont symétriques par rapport à une droite, si, quand on plie la feuille le long de cette droite, les deux figures se superposent. »
Le matériel choisi est au cœur de l'efficacité des manipulations, puisque la seule activité des élèves consiste à observer ces dessins et les pliages qu'effectue le maître.
Etudions donc les variables de sélection, qui le concernent, pour une ostension constructive.

- **Visualiser la superposition des figures**

Il est nécessaire pour les élèves de visualiser la superposition des deux figures symétriques, puisque c'est ce dont le maître parle dans la définition ; ainsi le matériel doit en partie être construit sur du papier calque. Indiquons cependant qu'il est important d'avoir aussi simultanément des configurations sur papier opaque, et sur papier blanc (transparent à la lumière), pour installer déjà auprès des élèves les supports qu'ils auront à utiliser par la suite, et leur signifier déjà l'absence ultérieure de possibilité de visualisation. Ou autrement dit, le fait que le pliage sera par la suite non plus effectif mais évoqué.

- **La taille du matériel**

Le matériel doit être présent, c'est à dire pas seulement visible, mais emplir l'espace pour s'imposer au regard, le plus lointain dans la classe. Le format A3 ne peut être qu'un format minimal pour ces manipulations.

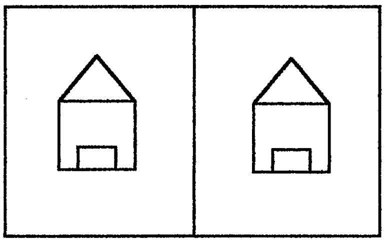
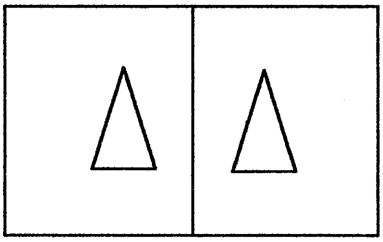
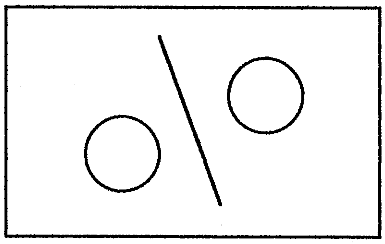
---

[13] Nous parlons de situation de définition - rappel, nous la situons plutôt au début du cycle 3.

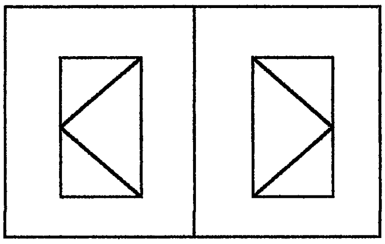
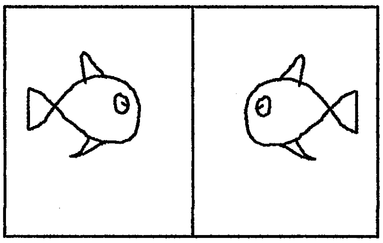
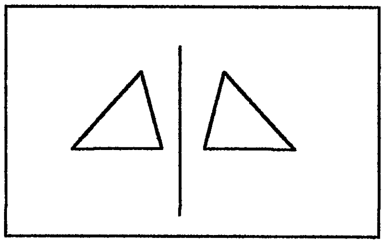
- **Le choix des figures : pour bien visualiser le retournement**

Certaines figures ne sont pas appropriées pour visualiser des figures symétriques, ou des axes de symétrie de figures, parce que leur caractère figuratif, leurs propriétés visuelles ou spatiales, prennent plus de poids que les propriétés géométriques sous-jacentes.

Pour les figures suivantes par exemple, le retournement (une des caractéristiques géométriques et visuelles de la symétrie axiale) n'est pas visible, le changement d'orientation ne peut pas être perçu. Ces images renforcent la confusion classique avec des figures translatées.

Dans le souci de travailler avec du matériel « de bonne clarté visuelle », les productions suivantes ne sont pas non plus judicieuses[14] ; le retournement y est visible, mais dans des cas trop limités à une impression de changement global d'orientation en terme de gauche droite.

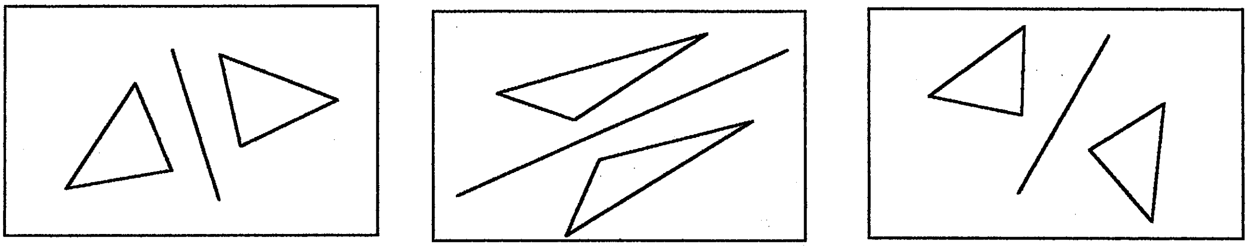




Plus généralement, nous mettons de côté les images pour lesquelles le motif de base a des bords parallèles ou perpendiculaires à l'axe de symétrie (car ces bords « ne se retournent pas ») ; et celles possédant (approximativement) un axe de symétrie parallèle ou perpendiculaire à l'axe tracé, ...

Dans ce même souci de « symétrie flagrante », les configurations à partir de triangles ne nous paraissent pas non plus bien adaptées ; la donnée de trois segments seulement ne semble pas suffisamment significative.

---

[14] Les productions dans tous les encadrés sont des productions de professeurs des écoles stagiaires deuxième année, extraites d'une séance en formation initiale. Cela permet de repérer la difficulté (compréhensible) des stagiaires à choisir les variables de façon pertinente.



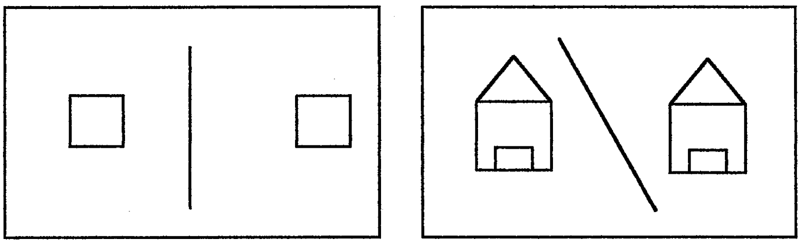
- **La position et l'orientation de l'axe, par rapport au support papier, ou aux figures**

Variable didactique classique spécifique du travail sur la symétrie axiale. La position spatiale ou par rapport aux figures associées joue un rôle indéniable et depuis longtemps bien connu. Cependant il n'y a pas de choix définitif à faire. Autant dans les premiers apprentissages, il est important d'éviter que les élèves n'associent symétrie et orientation particulière de l'axe, autant par la suite il peut être utile d'utiliser des configurations pour lesquelles l'axe est dans une position particulière.

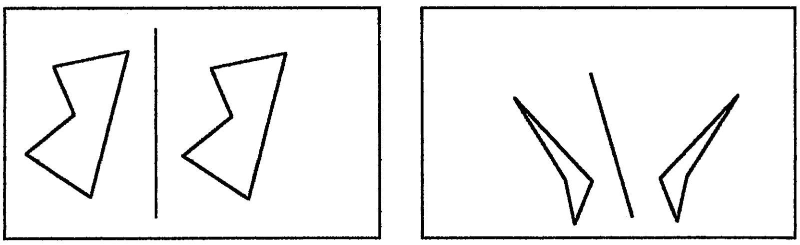
- **L'utilisation de contre-exemples**

Les contre-exemples se matérialisent par des productions erronées, *sans ambiguïté perceptive*, pour lesquelles les propriétés spatiales non respectées vont pouvoir clairement être formulées, et transformées en propriétés géométriques.

Par exemple les images suivantes ne sont pas pertinentes dans la mesure où elles portent sur d'autres propriétés que celle permettant de distinguer la symétrie des autres isométries, à savoir : le retournement.

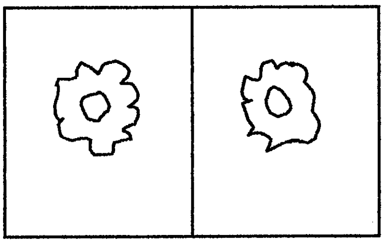


Par contre, de ce point de vue, les figures ci-dessous sont mieux adaptées.



- **Des tracés aux instruments**

Pour être au plus proche de la définition, la superposition des deux figures doit être effective. On ne peut pas se permettre ici de tracés approximatifs, comme la figure ci-dessous. Ce qui ne sera pas le cas pour d'autres activités (voir à ce propos le paragraphe III suivant).



4. Conclusion

Les deux exemples d'usage de l'ostension, présentés dans les paragraphes précédents, ne relèvent pas des mêmes principes.
Le premier est une situation d'argumentation, basée sur l'observation de figures, pour institutionnaliser des propriétés géométriques de la symétrie axiale, qui constitueront un milieu pour la validation dans d'autres situations autour de la symétrie. L'ostension réside dans la transformation de propriétés visuelles et spatiales en propriétés géométriques.
Le second exemple est une situation d'observation où le maître manipule du matériel pour accompagner ce qu'il déclare comme définition de deux figures symétriques. C'est une situation d'ostension classique, où le choix du matériel est fondamental pour en assurer sa pertinence.

Par ailleurs les élèves disposent d'images de référence constituées au cours du cycle 2. Nous savons depuis longtemps qu'une situation didactique d'observation à visée de constat ne peut être gérée de sorte à constater ce que le maître souhaiterait que les élèves constatent. Ainsi on ne peut sérieusement prétendre à établir (institutionnaliser) des propriétés géométriques des figures symétriques à partir de cette situation. Elle est cependant nécessaire pour se mettre d'accord sur une reconnaissance visuelle de la symétrie avant la situation de reconnaissance de configurations symétriques par rapport à une droite exposée dans le paragraphe 2, qui permet, elle d'introduire des propriétés géométriques par une ostension d'un autre type.

III. Parenthèse sur la tâche de construction

Ce paragraphe n'a pas de rapport direct avec l'étude que nous menons sur l'ostension, mais il est en liaison avec la réflexion générale sur l'articulation du spatial et du géométrique. Dans la mesure où il nous paraît apporter quelques éléments sur cette question, et est relatif à la symétrie axiale que nous traitons dans ce chapitre, nous nous sommes permis cette parenthèse.

Etant données une figure et une droite, il s'agit de construire le symétrique d'une figure par rapport à une droite donnée. Quels sont les moyens de construction disponibles au niveau de l'école élémentaire ?

1. Des moyens de construction rigoureux

Rigoureux, ça veut dire quoi ?
La rigueur se définit par rapport à la tâche ; c'est une tâche de construction, donc il s'agit d'être rigoureux dans la construction. Rigoureux dans la construction signifie alors réaliser une construction qui sera validée avec les moyens de validation du cadre de travail. Quels sont-ils ?
La validation ne porte pas sur la construction elle-même, mais sur le résultat de la construction ; ce qui nous ramène au paragraphe précédent, sur les moyens pour reconnaître que deux figures sont bien symétriques l'une de l'autre par rapport à une droite. Pour cela nos moyens de validation sont le pliage, l'utilisation du calque, et les arguments de non conservation de certaines propriétés de la symétrie axiale.
Au regard de ces moyens de validation, les moyens de construction suivants permettent de produire des constructions satisfaisantes : le pliage sur des feuilles à peu près transparentes ou le calque, et l'utilisation des instruments de géométrie (règle, équerre, compas) suivant différentes techniques de construction de losanges ou de perpendiculaires, avec report de longueurs, ...

Ainsi contrairement à certaines conceptions d'enseignants, l'utilisation des instruments n'est pas un moyen plus rigoureux que l'utilisation du calque ou du pliage. Ces trois moyens relèvent tous les trois d'une problématique pratique. Quand les élèves utilisent des instruments associés à des procédés algorithmiques, ils sont aussi dans un rapport pratique aux instruments.

Par contre ces moyens ne relèvent pas du même rapport aux objets du milieu matériel, ici les figures dans l'environnement graphique.

En effet, la construction par pliage et calque, est un moyen de construction globale de la figure, celle-ci n'a pas besoin d'être décomposée en sous-figures, considérée suivant divers de ses éléments, ... c'est un moyen « pratique » au sens de la problématique pratique, cette construction ne met en jeu aucune connaissance particulière, si ce n'est elle-même.
Tandis que les instruments sont associés à un moyen de construction ponctuelle de la figure : elle doit être décomposée. En particulier les parties polygonales doivent être regardées suivant les divers côtés, la construction ne concernant que les sommets du polygone ; pour les arcs de cercle, on construira le symétrique du centre, et un report de la longueur du rayon suffit, ...

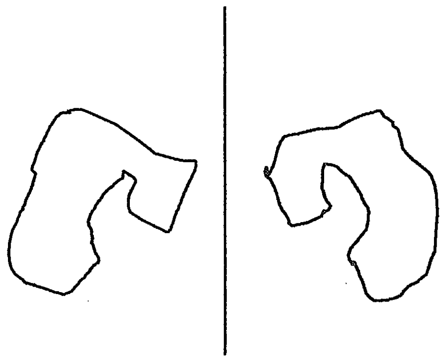
En résumé, par rapport aux moyens de validation du cadre de travail utilisé, les procédés de construction par pliage, calque ou instruments, sont tout aussi rigoureux. En revanche, ils n'ont pas la même précision et ne génèrent pas le même rapport aux objets de l'environnement graphique. En particulier, les instruments sont porteurs de propriétés qui traduisent des propriétés géométriques et, dans cette mesure, ils induisent un vocabulaire géométrique pour décrire les algorithmes de construction.

Les techniques de construction avec instruments ne sont pas explicitement au programme de l'école élémentaire, c'est l'aspect global qui prédomine à l'école élémentaire, même si les élèves doivent être capables de réaliser des tâches de construction de symétriques. Cela explique en particulier que les enseignants ne proposent le plus souvent que des activités de construction de symétriques dans le cadre d'un espace graphique quadrillé, pour lequel des propriétés de construction sont déjà prises en charge par le support (perpendicularité et écart à l'axe).
Cela condamne-t-il le travail sur papier blanc pour une tâche de construction de figures ?
Nous allons voir que non dans le paragraphe suivant, sous réserve d'adopter un autre point de vue sur l'environnement graphique et les moyens ou exigences de validation.

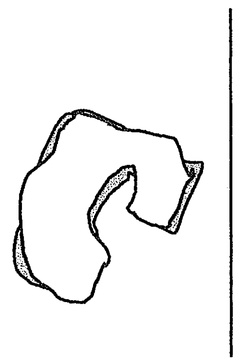
2. D'autres moyens de construction approximatifs

L'utilisation de gabarits ou le tracé à main levée, constituent des moyens de construction approximatifs. La notion de rigueur, telle que nous l'avons définie dans le paragraphe précédent ne s'applique plus ; nous devons redéfinir une nouvelle marge de tolérance et d'incertitude pour les moyens de validation.
Car nous allons conserver les moyens de validation définis précédemment (pliage, calque et arguments sur les propriétés de conservation de la symétrie).

Par exemple nous acceptons comme satisfaisante la configuration ci-dessous (dessin de gauche), où les figures sont construites à main levée, parce qu'elle convient toujours *dans une certaine mesure* au moyen de validation qu'est le pliage (dessin de droite).
« Mon moyen de construction n'est plus précis, je n'ai pas de superposition après pliage, il est *approximatif*, j'ai *presque* une superposition, *pas trop* de dépassement d'une des figures par rapport à l'autre, *peu* d'écart visuel entre les deux figures, ... »



Après pliage :



L'apprentissage de l'utilisation du calque et du pliage participe à donner du sens à une définition globale de la symétrie axiale.
L'apprentissage des techniques de construction avec instruments participe à donner du sens à une définition ponctuelle de la symétrie axiale.
La pratique des tracés à main levée participe à *la mise en acte* des propriétés de conservation de la symétrie axiale. Il faut avoir un contrôle de son action au fur et à mesure du travail, relativement à ces propriétés, même si cela est un processus implicite.

Dans cette situation il n'est pas question d'ostension, mais nous l'avons détaillée pour montrer en quoi le rapport aux propriétés de la symétrie déclarées lors de la situation de validation pour la reconnaissance de figures, évolue avec la tâche. Elles sont en jeu, non plus directement de façon déclarative, mais implicitement au travers le contrôle que l'on doit faire de sa production.

3. Remarques en formation

Il n'est pas évident de faire saisir aux professeurs des écoles que la tâche de construction à main levée met plus directement en contact les élèves avec les propriétés géométriques de la symétrie axiale, que la tâche de construction aux instruments.

En premier lieu ils rencontrent eux-mêmes des difficultés à réaliser la tâche[15] :

- *On ne peut même pas utiliser la règle pour tracer des traits droits ? ! ! !*
- *Vraiment je suis très mal à l'aise, je n'aime pas du tout cela.*
- *C'est pas de la géométrie ça.*
- *On ne peut pas demander ça aux élèves, et d'autres fois leur demander d'être précis, ... on ne va pas être crédible ...*
- *C'est difficile.*
- *Moi, je n'y arrive pas.*
- ...

En général les étudiants ne sont pas satisfaits de leurs productions ; bien que leurs productions, malgré leur mécontentement, respectent globalement les propriétés de la symétrie. Ce qui signifie qu'ils ont déjà bien intégré celles-ci. Pour des élèves, visualiser une propriété non respectée permettra de se rendre compte de l'apprentissage à approfondir.
Il n'est pas évident pour le formateur de faire comprendre que dans les différents essais et régulations peut se mettre en place, à l'aide du maître, une prise de conscience par l'élève, et une maîtrise progressive, des propriétés géométriques en jeu.
Cela semble plus clair pour des professeur des écoles plus expérimentés, bien que pour certains les réactions soient identiques aux précédentes. Cependant nous avons pu noter ces propos[16] :

- *Je ne comprends toujours pas à quoi ça sert, je trouve que c'est trop difficile.*
- *Mais justement, c'est parce qu'on n'y arrive pas bien, ou difficilement, qu'on va savoir à quoi il faut faire attention.*
- *Oui, ça permet d'avoir conscience des propriétés.*
- *Et puis, c'est une approche globale des figures symétriques, ça permet de voir si les enfants ont une bonne représentation.*

En formation continue également, une autre question apparaît, celle de la validation des productions à main levée. Les habitudes de validation collective, relativement à une norme commune, ne peuvent plus fonctionner :

---

[15] Propos recueillis lors de séances en formation initiale, avec des professeurs des écoles stagiaires deuxième année.

[16] Cf. annexe. Les propos des stagiaires sont en italique, les miens en caractères droits.

- *Dans la classe, le problème c'est sur la validation des dessins, on va avoir toujours la même discussion : « moi j'accepte le dessin, moi non... » et ce sera des discussions à n'en plus finir. Comment faire pour s'en sortir ?*
- En effet il y a un changement, non pas du mode de validation (toujours par pliage) mais de la marge d'incertitude que l'on se permet dans la superposition des figures.
Il est nécessaire déjà d'expliciter ce changement avec les élèves, dès le début de la présentation de l'activité, en annonçant également que le but du travail n'est pas de produire exactement une figure symétrique, mais de voir à quoi il faut faire attention quand on doit le faire, à quelles propriétés il faut faire attention.
Donc, à la fois les objectifs, mais aussi les moyens de validation sont à repréciser dès le début de la séance.
- *On n'est pas obligé non plus de vouloir tout valider collectivement. Moi je trouve au contraire que l'intérêt c'est l'auto-validation, puisqu'on peut avoir du calque ou plier. En fait c'est sur le travail qu'il faut fixer les objectifs, le tracé à main levée et non sur le résultat final.*

Ces échanges permettent de saisir comment le propre rapport de l'enseignant à ce que « faire de la géométrie » veut dire est directement mis en question. Ici pour certains, il s'agira de manier des instruments de géométrie, quelle que soit la situation, pour d'autres l'usage explicite de connaissances de géométrie caractérise cette activité, et pour bien d'autres encore beaucoup de nuances et de variations pourraient être énoncées.
Cependant une question qui préoccupe tous les enseignants, et permet de revenir à la question première des apprentissages, est bien évidemment celle de l'évaluation :

- *C'est bizarre de travailler avec eux à main levée et en évaluation on va leur demander des dessins bien faits, rigoureusement.*
- Attention, il faut bien cerner ce qui est en jeu. Le but dans le tracé à main levée c'est la mise en œuvre de propriétés géométriques de la symétrie axiale, plus ou moins consciemment, et de voir si les élèves se sont construit des images cohérentes de ce qu'est la symétrie axiale.
- *Pourquoi tu ne proposerais pas en évaluation des tracés à main levée ?*
- *Tu n'évalues pas la même chose, que lorsque tu demandes un tracé exact.*

Le (ou les) discours que le formateur doit bâtir pour prendre en compte les approches personnelles de chacun, et en même temps faire dévolution des questions et des positions de travail, reste bien évidemment à construire.

IV. Conclusion

Les connaissances sous-jacentes aux activités relatives à la symétrie axiale à l'école élémentaire, concernent la définition des figures symétriques et les propriétés géométriques de la transformation, conservation de forme, taille, retournement, équidistance et de perpendicularité à l'axe. Ce sont **des propriétés visuelles et spatiales, clairement identifiables à l'occasion d'expériences dans l'espace sensible** : des manipulations de pliages, ou des observations de configurations non symétriques « mais presque ».

Pour la situation de définition, à partir d'une manipulation par le maître d'un matériel bien choisi, ce que nous avions mentionné pour la même situation relative aux patrons de solides reste approprié : « La "démonstration visuelle" constitue une mise en scène d'une manipulation réalisée par le maître, où *les connaissances visées sont présentées, formulées, déjà comme des connaissances sous forme institutionnelle.* Les élèves sont dans un rapport effectif indirect au milieu si une situation de reproduction de la manipulation leur est proposée suite à cette mise en scène. »

Dans la situation de reconnaissance de configurations, les élèves sont également dans un rapport effectif indirect. Les observations ne s'appuient pas sur des manipulations, mais sur un rapport pratique perceptif aux figures, lesquelles sont sans ambiguïté perceptive pour mettre en évidence des propriétés géométriques. *Les connaissances visées sont déclarées à l'issue d'observations, où les propriétés géométriques de la symétrie sont mises en évidence dans l'environnement graphique, parce qu'elles font défaut en tant que propriété visuelle ou spatiale.*

De même que pour la situation de reconnaissance concernant les patrons de solides, nous pouvons constater que « **l'ostension est nécessaire pour la constitution d'un milieu pour la validation qui n'est plus l'espace sensible, mais doit être géométrique.** »

CONCLUSION POUR LA TROISIÈME PARTIE

L'ostension est un procédé utile à la déclaration par le maître de connaissances fixées comme objectifs d'apprentissage pour les élèves. La déclaration comporte à la fois le discours du maître, mais aussi toute la mise en scène du discours ; celle-ci peut être variée, et nous en avons étudié différents exemples :

- la « démonstration visuelle »[1] consiste en une manipulation par le maître d'un matériel permettant d'illustrer au mieux son propos. Les élèves sont dans un rapport d'observation, rapport effectif indirect (ces manipulations sont reproductibles).
- une autre mise en scène consiste à placer les élèves dans un rapport effectif direct avec du matériel, pour lequel, à partir d'expériences spatiales ou d'observations faites par eux-mêmes, ils découvrent ou mettent en acte les connaissances, objets du discours que le maître veut établir[2].

Pour ces déclarations, ce sont les *vertus spatiales du matériel* utilisé qui rendent la mise en scène pertinente pour la prise de connaissance, la mémorisation et l'apprentissage par les élèves des connaissances énoncées dans un cadre géométrique.

L'ostension, procédé didactique pour quoi ?

Bien sûr il s'agit pour les élèves d'apprendre les connaissances déclarées, mais ce seul rapport aux connaissances est insuffisant et d'autres situations d'apprentissage seront à concevoir, en particulier des situations à caractère adidactique.

C'est pourquoi, pour le maître, l'ostension est un procédé didactique qui a deux fonctions essentielles :

- **L'ostension qui permet de *définir des objets géométriques*, est nécessaire à la dévolution du milieu d'une situation d'apprentissage de ces connaissances.**

- **L'ostension qui permet d'*établir des propriétés géométriques*, est nécessaire à la dévolution du milieu de validation d'une situation d'apprentissage à caractère adidactique.**

---

[1] Détaillée pour les patrons (3B-III.2), la symétrie axiale (3C-II.3) et entrevue pour « l'expérience de la pomme de terre » (3A-III.1).

[2] Exemples des situations de reconnaissance de patrons de solides (3B-IV), et de configurations symétriques (3C-II) ; situations de construction et mise à plat de solides (3B-II, 3B-III.1).

Quatrième partie

Etude expérimentale autour d'une situation fondamentale de la géométrie comme modèle de l'espace

Chapitre 4A
Une situation fondamentale de la géométrie comme modèle de l'espace : la situation « Terrain et tige »

Chapitre 4B
Synopsis des séances de travail réalisées

Chapitre 4C
Analyse de travaux : éléments de régularité dans l'étude des interactions des élèves avec le milieu

CHAPITRE 4A

UNE SITUATION FONDAMENTALE DE LA GÉOMÉTRIE COMME MODÈLE DE L'ESPACE : LA SITUATION « TERRAIN ET TIGE »

Dans ce chapitre nous nous proposons d'étudier en détail un exemple de situation de modélisation d'un problème spatial, et de voir en quoi elle permet de développer des questions de recherche autour de l'articulation du spatial et du géométrique.
Les deux premiers paragraphes seront consacrés à une reprise des questions de recherche et l'étude de variables pertinentes pour la mise en place d'une expérimentation. Ensuite nous présenterons les possibilités de résolution du problème dans le cadre d'une problématique de modélisation.

Le chapitre 4B présente la synopsis des séances de travail réalisées dans une classe de CM2 en mai juin 2000. Le chapitre 4C est consacré à une reprise des questions de recherche, leurs analyses au vu des comptes-rendus précédents, et la donnée de pistes de travail pour la suite.

Plan du chapitre

I. Reprise des questions de recherche liées aux situations de modélisation

1. Hypothèses et questions de recherche

Rappelons dans un premier temps avec S&B une hypothèse de travail, qui permet de se situer dans une certaine conception de l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire :

> « Les concepts de la géométrie s'élaborent bien avant d'être étudiés comme des objets de la géométrie, fonctionnent et sont opératoires dans des situations spatiales, pour lesquelles ils sont des outils permettant d'élaborer des solutions spatiales. Initier à la géométrie c'est construire un milieu propice à l'élaboration future de certains savoirs, en faisant reposer le fonctionnement de certains concepts géométriques sur des connaissances spatiales qui elles, s'établissent au cours de la scolarité à l'école primaire. »

Il nous faut alors réfléchir à la possibilité de rendre effectif ce point de vue sur les concepts géométriques : « quel milieu construire, propice à l'élaboration de certains savoirs ... ? » Mais encore : de quels savoirs allons-nous parler ?

Dans la citation précédente se dégagent trois types d'objectifs d'apprentissage pour les situations de modélisation :
- un objectif lié à l'apprentissage de connaissances géométriques
- un objectif lié à la maîtrise de connaissances spatiales
- un objectif lié à la pratique de modélisation

Ce dernier aspect renvoie à une des hypothèses de travail que nous avions formulée en introduction de la façon suivante : *Faire de la géométrie à l'école consiste à apprendre que les connaissances de géométrie sont utiles pour résoudre des problèmes spatiaux.*
Mais c'est bien de ces trois aspects (objectifs) et de leurs articulations qu'il sera question par la suite. Cependant comme nous l'avons déjà annoncé, nous prendrons les questions du côté des situations elles-mêmes.

> « Une des approches de la didactique des mathématiques consiste à modéliser non seulement les connaissances que l'on veut enseigner ou celles qu'un sujet apprend, mais aussi les conditions dans lesquelles elles se manifestent. Les *situations* sont des modèles minimaux qui

« expliquent » comment telle connaissance intervient dans les rapports particuliers qu'un sujet établit avec un *milieu* pour y exercer une influence déterminée. »[1]

Rappelons qu'il s'agit ici de mettre en évidence des questions et des ébauches de réponses, concernant une « modalité » d'une situation fondamentale de la géométrie comme modèle de l'espace. Ainsi nos questionnements sont les suivants : (nous reprenons ici les questions posées dans le chapitre 1 sur les situations de modélisation)

Quel milieu construire pour permettre aux élèves d'entrer dans une problématique de modélisation ?

Quelles sont les composantes du milieu objectif avec lesquelles l'élève interagit ? Et quelles sont les variables pertinentes qui modifient les interactions de l'élève avec le milieu ?

Comment s'articulent, et comment articule-t-on, les connaissances spatiales spontanément développées par les élèves dans une problématique pratique, et les connaissances géométriques sous-jacentes à une modélisation ?

Ces questions se posent là de façon générale, comme des modèles de question, mais il est bien évident que nous ne pourrons y répondre que lorsqu'elles seront *situées*. C'est pourquoi nous avons choisi de travailler sur une situation particulière, suffisamment riche, pour permettre cette entreprise.
Parmi l'ensemble de situations spatiales que la géométrie permet de modéliser, nous avons porté notre attention sur la situation fondamentale d'« une mesure inaccessible » et retenu la situation de base suivante :

Une tige rectiligne est située à l'intérieur d'un terrain polygonal, ses deux extrémités sont situées sur deux côtés consécutifs du terrain. Le terrain est clôturé de sorte qu'on ne peut pas accéder à l'intérieur, ni le survoler.

Il s'agit de déterminer une mesure de la longueur de la tige.
L'ensemble situation de base et tâche, constitue la situation « Terrain et tige » dont il faut définir le milieu à retenir pour l'étude.

---

[1] G. Brousseau, *Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. L'étude de l'espace et de la géométrie*, conférence Université de Crète, avril 2000.

Pour cela, nous allons nous aider du paragraphe suivant consacré à quelques variables inhérentes à toute situation de modélisation, complété des choix retenus pour l'expérimentation. La structuration a priori du milieu associée à la situation « Terrain et tige » sera ensuite précisée dans le paragraphe II.

2. Etude de quelques variables pertinentes pour une situation de modélisation

Trois variables semblent être incontournables dans toute situation de modélisation :

- une variable liée au caractère d'interaction spatiale effective d'un sujet avec le problème, pour la dévolution du problème ;
- la variable « instruments » ;
- une variable liée aux possibilités de déplacements effectifs pour réaliser les actions de résolution du problème, dans l'environnement initial du problème.

a) *La crédibilité spatiale* : une variable fondamentale pour la dévolution du problème.

Pour accepter que le problème pose problème, il doit en effet poser un *réel* problème.
Le sujet doit être pris dans une réalité spatiale, pour laquelle le problème est suffisamment visible pour qu'il soit pris en compte et considéré comme un problème.

Partant de la situation « Terrain et tige », prenons deux exemples à l'extrême pour préciser.
Si le terrain est un terrain de tennis entouré par du grillage de cinq mètres de haut, et que la porte est effectivement fermée, le problème existe. On accepte ou non de le résoudre, cela est une autre question ; mais de fait, le problème pose problème.
Si, par contre le terrain est tel que l'on peut effectuer une mesure directement, la contrainte de ne pas y entrer ni le survoler peut n'être plus cohérente, voire devient absurde.
Mais entre ces deux extrêmes, d'autres cas peuvent être proposés pour lesquels l'existence de murs délimitant le terrain n'est pas un fait réel mais peut être évoquée, de façon cohérente et crédible pour le sujet. L'acceptation alors de cette ***crédibilité spatiale*** du problème, relève d'un contrat intellectuel. C'est pourquoi nous relions cette variable à la dévolution du problème.
Il est un fait, que plus le sujet est jeune, plus ce contrat intellectuel est difficile à mettre en place a priori. D'ailleurs même assez tard, des difficultés sont repérées dans l'acceptation du « on imagine que … ». Dans le cadre scolaire il n'est pas possible en général de se placer dans des conditions créant *de fait* une réalité spatiale prenant en compte toutes les contraintes d'un problème. Cependant il est possible d'inscrire un problème dans une réalité et de créer des conditions de crédibilité spatiale. Présentons nos choix pour l'expérimentation pour donner un exemple :

Choix pour l'expérimentation

Nous travaillerons dans la cour de récréation avec des terrains représentés à la craie au sol, et une baguette en bois pour la tige à l'intérieur du terrain.

La tige est importante à matérialiser, et non pas à représenter à la craie au sol, dans un premier temps. Elle est en effet un des principaux objets donnant un caractère de réalité spatiale au problème ; puisque c'est la longueur *de cet objet* qu'il faut déterminer.

Par contre pour la contrainte de clôture du terrain, la référence à des murs transparents, très hauts, rendant impossible l'entrée et le survol du terrain, suffit. La taille des terrains dont les côtés ne seront pas inférieurs à 3 mètres, rend cette fiction crédible.

Les éléments qui situent le problème dans un environnement doivent permettre une crédibilité spatiale de la situation, pour que les élèves l'acceptent comme un réel problème à résoudre. C'est une condition nécessaire à la dévolution d'une situation de modélisation.

Evidemment on peut se dire que la crédibilité spatiale d'un problème peut n'être pas la même pour tous les élèves. Comme souvent, ce sont des conditions objectives a priori que nous pouvons définir, mais qui resteront toujours soumises au subjectif.

b) Remarque sur la variable « taille »

La crédibilité spatiale est directement liée à une autre variable : la taille des objets du problème et de l'espace dans lequel ils se situent. Pour que le problème pose en effet problème et soit un problème spatial, la taille des objets à considérer entre évidemment en jeu.

De même, signalons un second point tout aussi évident que le premier, la taille est une propriété des instruments utilisés pour établir des relations entre les objets de l'espace, réaliser les actions de résolution ... et le rapport d'un sujet à ces instruments diffère selon leur taille.

En fait, pour notre recherche, nous considérons que « la taille » n'intervient pas directement en tant que telle dans l'étude des interactions des élèves avec le milieu[2] ; elle intervient à travers l'environnement de travail choisi, des objets du problème, et au travers des instruments mis à disposition pour la résolution.

Or dans l'étude des rapports des élèves avec le milieu, c'est avec cet environnement, ces objets, ces instruments, que l'élève va interagir. C'est pourquoi nous ne retiendrons pas la taille comme une variable, mais plutôt comme une propriété des variables qui entrent dans le jeu des interactions de l'élève avec le milieu.

[2] Cf. les remarques concernant micro, méso et macro espace IV. du chapitre 1.

c) Les instruments

Le fait d'avoir choisi une situation initiale spatiale, et la volonté d'installer dans un premier temps la résolution du problème dans un cadre spatial, impose de définir, repérer, reconnaître les instruments qui vont être utiles à la résolution du problème.
Ici nous pouvons dégager plusieurs catégories d'instruments :

- Ceux relevant de la pratique scolaire, ayant une fonction déterminée :
  - La règle graduée : pour le contrôle ou la construction de lignes droites (la graduation étant alors inutile) ; et pour la mesure de longueurs ;
  - L'équerre pour le contrôle ou la construction d'angles droits, et éventuellement d'angles à 30, 60 ou 45 degrés ;
  - Le compas, pour construire des cercles, ou arcs de cercle, et reporter des longueurs ;
  - Le rapporteur, pour mesurer des angles (il n'est plus très présent à l'école élémentaire du fait de la quasi disparition des programmes de 95 des angles comme objets d'étude).

On trouve ces instruments dans la pratique courante de classe, dans deux tailles différentes : la taille papier, et la taille tableau. Ils permettent pour leur environnement respectif (papier et tableau) d'effectuer toutes les constructions que l'on souhaite.

- Ceux relevant d'une pratique professionnelle

Le fil à plomb pour contrôler la verticalité (une certaine perpendicularité) ;
Les instruments de visée, pour repérer des alignements ;
Le compas d'angle, pour reporter des angles (instrument juxtaposant par l'extérieur deux objets rectilignes aux deux demi-droites représentant l'angle ; l'écartement fourni par ces « bords » constitue « un gabarit » de l'angle cherché) ;
Le compas de relèvement pour obtenir une mesure de l'angle avec le pôle nord ;
...
Il n'est pas utile de dresser une liste exhaustive de ces instruments, dont on perçoit qu'ils sont adaptés aux environnements dans lesquels se posent les problèmes.

Choix pour l'expérimentation

Nous avons fait notre étude dans un cadre classique d'apprentissage. Ainsi les instruments mis à la disposition des élèves seront les instruments usuels : règle, équerre, compas ; en petit format pour papier et en grand format tableau pour la cour de récréation.
D'autres éléments, qui ne sont pas appelés « instruments », ni même « outils » peuvent aussi être utiles : ficelles, baguettes en bois, pour effectuer les prolongements ; et d'autres encore seront également mis dans la malle du matériel de départ : des crayons et des feuilles de papier, ...

Terminons ce paragraphe par une dernière variable importante pour tout problème donné dans un cadre spatial : la possibilité ou non d'effectuer réellement des actions dans l'environnement spatial du problème.

d) La possibilité d'effectuer des déplacements dans l'espace de travail

Nous ne parlons pas ici des contraintes initiales d'une situation, mais des possibilités d'agir ou non directement sur l'environnement de travail : se déplacer, effectuer des constructions, ... pour résoudre le problème posé.
En général, dans le cas d'une impossibilité d'action directe, la modélisation par un plan est nécessaire, et fait entrer la situation dans le cadre de situations fondamentales d'utilisation de plans.

Pour la situation « Terrain et tige » par exemple, imaginons que dans la cour de récréation il ne soit pas possible d'effectuer réellement les prolongements ou actions nécessaires pour résoudre le problème dans l'espace sensible.
Alors seules deux procédures peuvent être efficaces : si cela est possible, reproduire le terrain (ou une partie) à un autre endroit où l'on pourra effectuer une mesure directe de la reproduction de la tige ; ou bien construire un plan à l'échelle du terrain, et prendre la mesure de la tige sur le plan. C'est d'ailleurs dans cette otique d'en faire une situation pour la modélisation de l'espace par un plan, que S&B ont étudié la situation « Terrain de tennis ».

Choix pour l'expérimentation

Ne cherchant pas à privilégier des apprentissages autour de la notion de plan nous n'avons pas retenu cette contrainte pour notre travail. Ainsi le problème sera placé dans un environnement tel que toute action (construction) peut être réalisée effectivement dans cet espace.
Si nous devions fédérer l'ensemble de l'expérimentation autour de concepts (et non d'une situation comme nous le ferons) la situation « Terrain et tige » serait plutôt à envisager comme une situation fondamentale pour introduire les déplacements ; les déplacements au sens pratique du terme et non pas dans leur acceptation géométrique (nous dirions alors déplacements et retournements).
L'objectif général de connaissance pourrait être formulé ainsi :

> *Lorsqu'un objet n'est pas accessible, on peut en construire une représentation qui, elle, sera accessible, car déplacée par rapport à l'objet initial, et sur laquelle on va pouvoir travailler. En particulier on pourra dégager des propriétés de l'objet à partir des propriétés de la représentation.*

Cette représentation que l'on construit, dans les conditions mentionnées précédemment et ultérieurement, cette représentation n'est ni plus ni moins que le modèle (la connaissance géométrique) qui permet le transport. Nous apprécions ici le terme représentation, car bien loin d'être ambigu, il renvoie, en plus de ce qui est dit précédemment, au rôle de l'image, des images de géométrie, des figures de géométrie, dans ce dispositif.

Maintenant que les grands points sont notés pour définir la situation objective de « Terrain et tige » et déjà préciser quelques éléments du milieu matériel et objectif, nous allons reprendre l'étude de la situation de référence retenue pour « Terrain et tige » et les variables permettant des interactions avec le milieu pour l'inclure dans une situation d'apprentissage.

II. Variables pour articuler situation de référence et situation d'apprentissage

Rappelons ce que disaient S&B à propos de la situation « Terrain de tennis » dont dérive la situation « Terrain et tige » :

> « Les deux situations qui fondent la modélisation :
> - la situation de référence : interaction spatiale effective et adidactique
> - la situation d'apprentissage : situation de modélisation
>
> [...] La situation de référence doit donc donner naissance par l'effet de variables didactiques convenables, à une classe de situations modélisables par la même notion géométrique. [...]
> Il s'agit donc d'organiser une situation d'apprentissage où, par évocation de la situation de référence, pourra être dégagée une loi (de type loi physique) de l'espace qui s'appuie sans les contredire sur les connaissances préalablement étudiées. [...] Ceci va être obtenu en faisant varier la valeur d'une variable didactique de la situation de référence, ici la forme du terrain. [...] » (p70-71)

En effet la forme du terrain sera une des variables fondamentales de la situation « Terrain et tige ». Citons la seconde tout aussi importante : l'articulation des environnements cour de récréation et papier crayon.
C'est le sujet de ce paragraphe.

1. La forme du terrain

En fait ce n'est pas tant la forme du terrain que la forme du triangle formé par la tige et les côtés du terrain qui importe. Et encore, ce n'est pas tant cette forme que l'angle formé par les deux côtés consécutifs. Nous renvoyons à l'étude des procédures géométriques pour s'en convaincre (paragraphe III). En particulier les deux cas « fondateurs » de la situation sont l'angle droit, et l'angle non droit.
Nous ferons apparaître les deux cas en les incluant dans deux formes présentant ces caractéristiques : le terrain de forme rectangulaire, et le terrain de forme quelconque, en limitant cependant à un quadrilatère pour rester dans la même famille polygonale que celle du rectangle.

a) Choix d'un terrain rectangulaire pour la première séance

Pour que le problème puisse avoir du sens pour les élèves et leur permette de s'engager dans une résolution, nous faisons le choix de travailler initialement avec un terrain de forme rectangulaire.

C'est une forme suffisamment habituelle, socialement et culturellement, pour que les élèves appréhendent correctement la situation. La référence à un terrain de tennis, une salle de classe, ... peut être faite et permet la compréhension du problème.
D'autre part pour cette forme de terrain, les élèves peuvent plus facilement entrer dans la résolution du problème. Ainsi dans un premier temps il peut être compris et résolu sans toutefois que le recours aux différentes démarches soit évident.

Ensuite il nous semble pertinent de proposer la même situation aux élèves avec un terrain de forme quadrilatère quelconque. Car alors en supposant que les élèves réinvestissent les procédures précédentes, celles-ci ne peuvent maintenant être efficaces que si les aspects mathématiques sous-jacents sont pris en compte explicitement.

b) Exemple concernant le recours à la symétrie axiale

Si le terrain est rectangulaire, seule la propriété d'équidistance à l'axe est consciemment mise en jeu par les élèves. Les autres propriétés sont cachées par la présence de l'angle droit. Lorsque le terrain n'est plus rectangulaire, on observe que les élèves réinvestissent[3] uniquement la propriété d'équidistance, aboutissant alors à un résultat erroné.
Ainsi deux pistes de réflexion peuvent être envisagées :

- La première porte sur les propriétés à prendre en compte pour que la procédure symétrie soit efficace.

La situation avec le terrain quelconque, en interaction avec le problème sur terrain rectangulaire, peut constituer une situation d'apprentissage pour des propriétés de la symétrie axiale. Car c'est seulement lorsque le terrain n'est plus rectangulaire que peuvent être explicitées les propriétés permettant de valider dans un cas général des constructions par symétrie axiale.

- La seconde piste de réflexion est plus d'ordre métamathématique.

Elle consiste à concevoir un discours avec les élèves sur la première piste de réflexion. Est-il possible de formuler avec les élèves le fait qu'une procédure peut être efficace dans un certain

---

[3] Nous nous référons ici à des expérimentations de la situation « Terrain et tige » menées en classe de CM :
Régis ROGINSKY, *Rôle et impact du contexte de l'énoncé dans la résolution de problème en géométrie*, Mémoire professionnel de professeur des écoles stagiaire deuxième année, 98/99, IUFM de Créteil, Centre de Livry-Gargan.
Christophe ALAUZET, *Comment amener les élèves à utiliser un plan ?* Mémoire professionnel de professeur des écoles stagiaire deuxième année, 98/99, IUFM de Créteil, Centre de Livry-Gargan.

contexte, et remise en cause dans un autre contexte, et que la compréhension des propriétés mathématiques en jeu est nécessaire pour comprendre et valider l'usage d'une procédure ?

Pour résumer, le changement de forme du terrain permet de déstabiliser des procédures efficaces pour les questionner réellement d'un point de vue géométrique.

2. Articulation des environnements papier et cour de récréation

a) Référence à des expériences antérieures

Dans le cadre d'expérimentations en formation initiale, non formalisées pour la recherche, nous avions proposé la situation « Terrain et tige » à des professeurs des écoles stagiaires deuxième année, pour trois environnements distincts :

- l'environnement « papier crayon » : le terrain (avec tige) est représenté sur une feuille A4.
- l'environnement « table » : en regroupant deux tables de classe rectangulaires, on obtient une surface de 1 à 2 m^2, sur laquelle le terrain est matérialisé par de la ficelle et des boulons à chaque sommet, la tige est une baguette en bois.
- l'environnement « hall » : un hall d'une quarantaine de mètres carrés dans lequel le terrain est matérialisé par de la ficelle et des boulons aux sommets, le terrain étant alors de 6 à 8 m^2 à peu près ; la tige est une baguette en plastique.

Les étudiants confrontés au problème dans l'environnement « papier crayon » se sont immédiatement représenté la situation comme un problème de géométrie. Et par conséquent se sont immédiatement mis en connexion avec des connaissances géométriques qu'ils possédaient (qu'ils avaient apprises et intégrées, ce qui n'est pas le cas pour les élèves de l'élémentaire).
Pour les autres environnements, cette connexion s'est également produite, mais bien plus tard au cours de la recherche des étudiants. Car avant d'être un problème modélisable en terme de géométrie, c'était pour eux un problème spatial.

Quelques éléments pour comprendre pourquoi l'environnement « papier crayon » s'est tout de suite constitué pour les étudiants en environnement géométrique :
sur la feuille, le terrain n'existe pas, la tige non plus, le milieu matériel n'est qu'évoqué dans l'énoncé. Ce qui est sur la feuille est une représentation de ce milieu, et prend finalement l'aspect d'une figure géométrique. L'implicite régulièrement présent dans les activités scolaires, d'avoir à adopter un point de vue géométrique sur une figure dessinée, fonctionne pour ces étudiants.

C'est la situation modélisée, représentée, qui est présentée aux étudiants. De fait l'énoncé est déjà proposé dans un contexte de modélisation.
Tandis que les autres environnements inscrivent le problème dans une réalité spatiale. Aucun indice de modélisation n'est donné a priori.

Nous retiendrons l'aspect environnement géométrique que peut prendre l'environnement papier crayon. De ce fait, nous faisons l'hypothèse que l'environnement papier crayon pourra être un moyen d'entrer dans une modélisation du problème, ou d'entrer dans un rapport géométrique aux modèles intervenant dans la résolution spatiale.

b) Une hypothèse de travail

Une hypothèse de travail concernant les représentations figurées :
Le recours à des représentations planes sur feuille de papier, permet d'entrer dans un rapport géométrique aux procédures utilisées, c'est à dire rend nécessaire l'explicitation d'une modélisation géométrique.

L'intérêt de formuler une procédure par schématisation est de faire produire aux élèves des représentations planes de la situation et de leur démarche. En particulier, les aspects géométriques en jeu (parallélisme, orthogonalité, angles, report de longueur, ...) seront pris en compte de manière plus nécessaire par les élèves.

Reformulons notre hypothèse de travail :
La schématisation (production de figures), comme moyen de rendre compte de la résolution d'un problème spatial, permet :
- de *rendre explicite* l'utilisation implicite d'outils géométriques dans un cadre spatial
- de faire la dévolution aux élèves de l'environnement papier crayon comme représentation de l'espace géométrique.

c) Des choix pour l'expérimentation

Ici encore, c'est l'articulation des environnements qui permettra de construire la situation d'apprentissage. La donnée du problème dans la cour de récréation est fondamentale pour installer la situation de référence. L'introduction de l'environnement papier crayon peut se faire de différentes façons :
- les élèves produisent eux-mêmes des représentations planes du problème, comme moyen de schématiser leurs procédures, pour répondre à une tâche de communication.
- les élèves doivent résoudre le problème, directement dans cet environnement. Bien sûr, une fois le problème spatial dans l'environnement « cour de récréation » compris et

suffisamment intégré pour qu'il puisse se constituer en référence pour les élèves, et que ceux-ci acceptent que le problème donné dans l'environnement « papier crayon » pose problème.

Nous retiendrons ces deux choix pour l'expérimentation, sans réellement distinguer la tâche de communication, de la tâche de résolution. Elles s'articuleront de façon dialectique et s'engloberont dans une unité de travail : rechercher des méthodes et les communiquer. L'environnement papier crayon joue le rôle de passage à la formulation pour la communication. Et c'est l'articulation des environnements de travail, cour de récréation, et feuille de papier, qui sera le moteur de l'évolution du milieu objectif pour articuler références et apprentissages.

Avant d'entrer dans le détail de l'aspect résolution du problème, voici un petit canevas pour une trame générale de l'évolution des séances qui ont été proposées :
Première séance dans la cour de récréation, avec des rectangles dessinés au sol ;
Seconde séance, en classe, travail sur papier avec des terrains rectangulaires.
De nouveau en classe, pour la troisième séance, sur papier, le terrain a changé de forme, c'est un quadrilatère quelconque.
Pour la quatrième, retour dans la cour, les quadrilatères quelconques sont dessinés au sol, puis retour dans la classe, travail avec les mêmes quadrilatères papier que la séance précédente.
Une séance de synthèse sur l'ensemble du travail des élèves, effectuée à partir de discussions sur des travaux erronés et corrects d'élèves, constitue la cinquième séance.

III. Résolution du problème dans une problématique de modélisation

L'analyse mathématique précise les outils théoriques qui permettent de résoudre le problème dans le modèle. Mais cela ne suffit pas pour mener au bout la résolution puisqu'il s'agit de déterminer une mesure de la longueur de la tige. Le retour au problème spatial est nécessaire, et il faut s'interroger sur les moyens techniques qui permettent de rendre effective une procédure théorique. Il est alors incontournable de préciser l'environnement de travail. En effet la confrontation au spatial peut ne pas y être de même nature comme nous l'avons vu précédemment.

Nous présenterons donc, dans un premier paragraphe, les aspects liés au caractère spatial du problème, dans la problématique de modélisation. Ensuite nous présenterons les procédures géométriques mettant en œuvre des concepts géométriques cités dans les programmes de l'école élémentaire. Ce n'est pas une liste exhaustive de procédures qui sera présentée, mais celles relatives à des savoirs ou connaissances abordables en fin de scolarité primaire.

1. Premières articulations du spatial et du géométrique

Rappelons le problème :

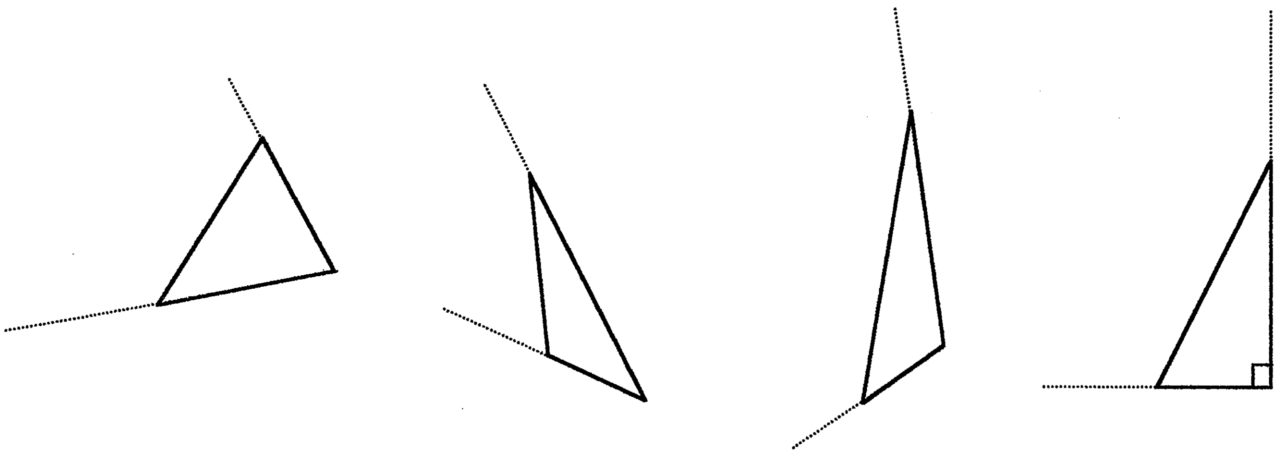
> Il s'agit de déterminer indirectement une mesure de la longueur d'une tige rectiligne, située sur deux côtés consécutifs d'un terrain de forme polygonale.

Que va-t-on retenir de cette situation qui constituera le problème modélisé ? Et à la fois dans la dernière phase, celle de la confrontation de la résolution dans le modèle à sa réalisation pratique spatiale : les modèles intervenus sont-ils opérationnels dans le cadre spatial initial ?

a) Que retient-on comme problème modélisé ?

La modélisation consiste dans un premier temps à se ramener à un problème minimal que l'on sait suffisant pour traiter le problème dans le modèle géométrique. Pour « Terrain et tige » le problème peut se ramener à la détermination de la longueur d'un côté d'un triangle, connaissant les deux autres côtés (parties des côtés du terrain), par leurs longueurs et l'angle qu'ils forment.
Cependant, dans la modélisation, le caractère inaccessible du terrain, contrainte spatiale, devra être gardé en mémoire, puisqu'il autorisera ou non la mise en œuvre de certaines procédures.

La position de la tige à l'intérieur du terrain, la forme du triangle qu'elle définit avec les deux côtés consécutifs du terrain, peuvent également rendre certaines démarches plus ou moins efficaces ou opérationnelles. On pourra distinguer quelques cas, suivant les angles aigus ou obtus du triangle et la position de la tige.



En l'absence de précision sur le cas considéré, les procédures présentées seront valables pour tous ces cas. Par la suite, l'angle formé par les deux côtés consécutifs du terrain, sera appelé l'angle Â.

Regardons maintenant quelques contraintes générales à la mise en œuvre spatiale d'outils géométriques. L'environnement considéré est celui de la cour de récréation ou l'environnement papier.

b) Relations entre instruments et notions géométriques

Concernant les angles

La prise en compte de la contrainte fondamentale « du terrain inaccessible » n'implique pas que l'angle des deux côtés du terrain ne soit pas non plus accessible directement.
Il peut l'être en utilisant un compas d'angle. On pourrait aussi construire un gabarit de l'angle opposé à Â par le sommet (à l'extérieur) puis par complétion construire un gabarit plein de l'angle cherché. Plusieurs systèmes (techniques) sont donc possibles pour obtenir un gabarit de l'angle Â[4].

D'une façon générale, pour les angles, nous venons de le voir, il est nécessaire de construire des gabarits. Bien sûr certains angles particuliers disposent de gabarits « culturellement » et « socialement » établis : une équerre est avant tout un gabarit de l'angle

[4] En annexe, des calculs pour déterminer l'écart de mesure sur la tige en fonction de l'écart de mesure de l'angle Â.

droit, et peut selon la forme fournir des gabarits d'angles de 30, 45 ou 60 degrés. Les autres angles n'en disposent pas.

Concernant les prolongements de lignes droites

Les prolongements de lignes droites doivent *prendre appui* sur ces mêmes lignes pour respecter l'alignement qui justifie le prolongement. Et la précision sera plus importante si l'on s'appuie sur une plus grande ligne déjà construite pour la prolonger.
Nous verrons à ce propos que dans la cour de récréation ou sur la feuille de papier, les prolongements de traits droits se font en général par les élèves sans prise d'appui sur les traits à prolonger.
Remarquons qu'il s'agit là d'une connaissance non formalisée, ni d'ailleurs même formulée en géométrie à l'école, que nous pouvons qualifier de connaissance spatiale. Car elle vise à effectuer et / ou contrôler une propriété d'un objet construit spatialement.

Signalons que les prolongements des côtés du terrain sont possibles, puisque l'on peut y prendre appui par l'extérieur. Le prolongement de la tige par contre ne peut se faire suivant ce même système, puisqu'on ne peut entrer sur le terrain. Il serait nécessaire d'user d'un instrument de visée si l'on ne veut plus se référer à la vue, dans le cadre de l'environnement spatial. Dans l'environnement papier on ne pourra effectuer ces prolongements si on considère les figures pour préparer des actions à réaliser ensuite sur le terrain ; par contre ils sont réalisables si on réalise un plan du terrain pour traiter sur feuille le problème.

Concernant les longueurs

Le report de longueur peut se faire avec ou sans intervention de la mesure.
Sans la mesure, sur papier, il s'effectue en général avec un compas. Dans un espace de plus grande taille, on ne dispose pas vraiment d'un instrument particulier. On utilise des gabarits de longueurs (ficelle, baguettes, ...).
Pour la prise de mesure on dispose d'instruments adaptés aux dimensions des objets à mesurer : règles, mètres, décamètres, ...

Concernant quelques constructions

D'une droite parallèle (ou perpendiculaire) à une droite donnée passant par un point donné, par exemple, et essentiellement. Car c'est en fait les deux seuls problèmes pouvant poser pour « Terrain et tige » des difficultés de réalisation spatiale. En réalité le problème est détourné du fait de la taille des objets intervenant dans la cour de récréation. Les instruments format tableau, les dimensions des terrains, la présence de baguettes en bois, permettent de réaliser ces constructions de la même façon qu'elles sont réalisées sur papier.

De fait, nous constaterons que sur papier ou dans la cour ces constructions se font à vue par les élèves.

Ces points étant considérés, nous pouvons passer maintenant à la présentation des procédures géométriques de résolution. Précisons qu'il ne s'agit pas ici d'une anticipation sur les futurs travaux d'élèves, mais d'un regard sur les mathématiques en jeu (utilisables, utilisées) pour résoudre.

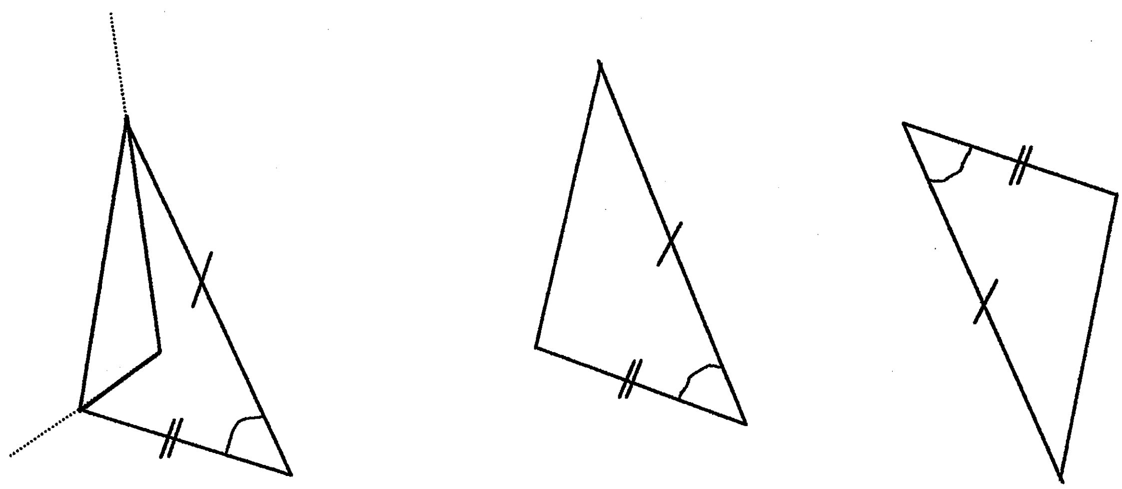
2. Etude de procédures géométriques de résolution

Avant d'entrer dans le détail, précisons les deux grands types de procédures possibles :

- La reproduction du triangle par utilisation d'isométries (translations, rotations, symétries), ou d'homothéties, ou de composées de celles-ci : reproduction du triangle par similitude.
- La reproduction du triangle à une certaine échelle par la réalisation d'un plan.

Ne souhaitant pas que les analyses préalables soient trop en décalage avec ce qui pourra se dire et se structurer suite aux expérimentations en classe, nous ne présenterons pas les procédures suivant les types donnés ci-dessus. En effet bien qu'ils permettent une bonne communication des mathématiques sous-jacentes, ils ne permettent pas de saisir en détail ce qui entre en jeu dans les démarches associées.
Les procédures seront donc organisées par rapport aux figures géométriques qu'elles font intervenir, plus proches en cela de ce qui apparaîtra dans les travaux des élèves.

Cependant, indiquons toutefois que toutes les procédures se ramènent d'un point de vue théorique mathématique à un procédé de triangulation : la tige peut être considérée comme le troisième côté d'un triangle dont on connaît les longueurs des deux autres côtés et leur écartement (leur angle). Il s'agit alors de reproduire ce triangle. Et selon les transformations utilisées, il est reproduit sans changement d'orientation, ou avec changement d'orientation.



Indiquons que cette procédure, d'un point de vue spatial, serait la plus commode, si l'on disposait de l'instrument adapté : un grand compas, dont les branches seraient plus longues que a et b, permettant de reporter directement de l'extérieur du terrain la longueur de la tige.

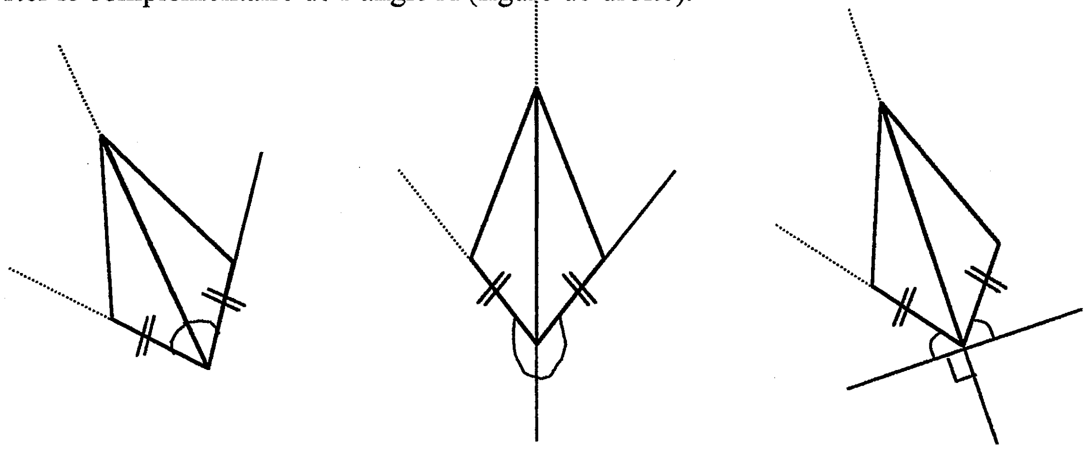
Passons maintenant à la présentation des diverses procédures de reproduction du triangle formé par la tige et les côtés du terrain, que nous pouvons a priori voir émerger, avec des élèves de fin de cycle 3 de l'école élémentaire.

a) Utilisation de la symétrie axiale

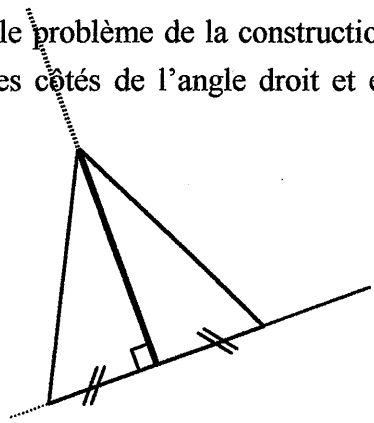
Il se distingue ici deux grands types de procédures liées à l'usage de la symétrie axiale : celles relatives à l'usage des angles et celles liées à la perpendicularité à l'axe.

i) Symétrie axiale : report d'angle, report de longueur

Nous l'avons déjà signalé, on peut obtenir un gabarit de l'angle Â, ce qui permet d'effectuer une construction (figure de gauche).
On peut également prolonger un côté du triangle et considérer l'angle au sommet formé par ce prolongement et l'autre côté du triangle, et reporter cet angle (figure centrée).
Si l'angle Â est un angle aigu, on peut également construire une perpendiculaire à l'axe, et reporter le complémentaire de l'angle Â (figure de droite).

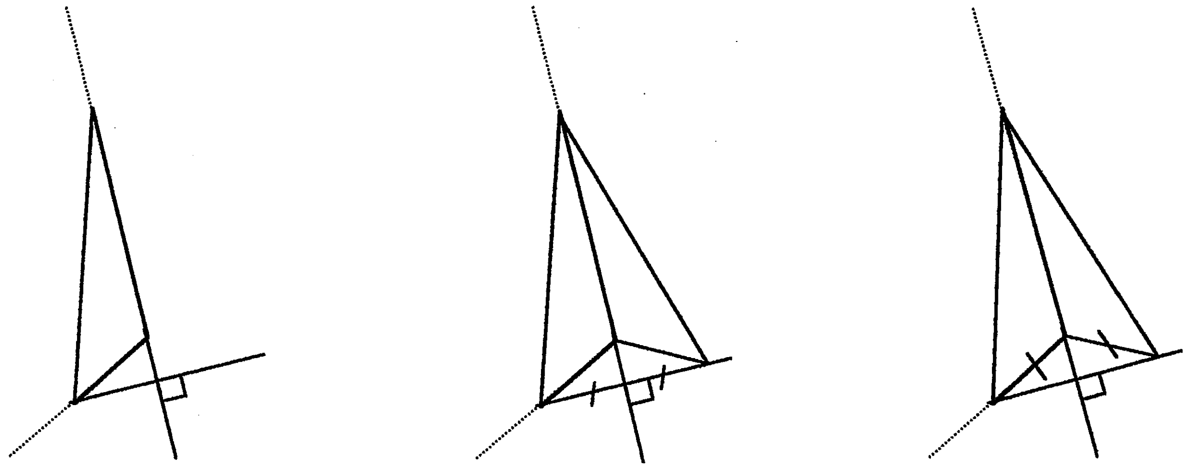


Dans le cas où le triangle est rectangle, le problème de la construction de l'angle n'apparaît plus, puisqu'il suffit de prolonger un des côtés de l'angle droit et ensuite de reporter une longueur.

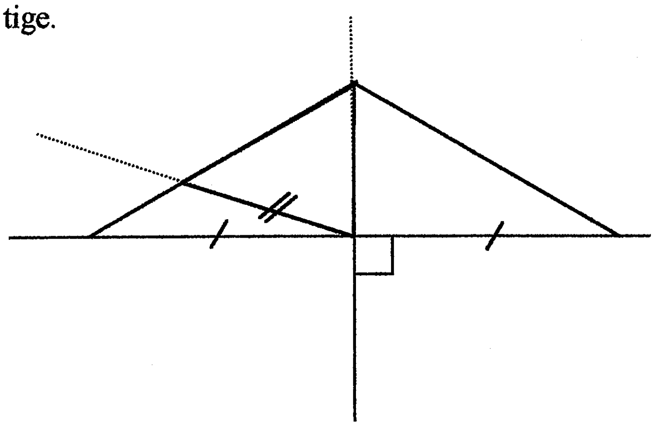


ii) Symétrie axiale : perpendicularité à l'axe, et report de longueur

Cette procédure n'est valable ici que pour l'angle Â obtus (pour Â aigu, cela imposerait d'entrer sur le terrain).
On prolonge un des côtés du triangle, on construit une perpendiculaire à cet axe passant par le sommet du triangle opposé à ce côté. Ensuite on peut ou bien reporter la distance de ce sommet à l'axe, ou bien reporter la longueur du second côté.

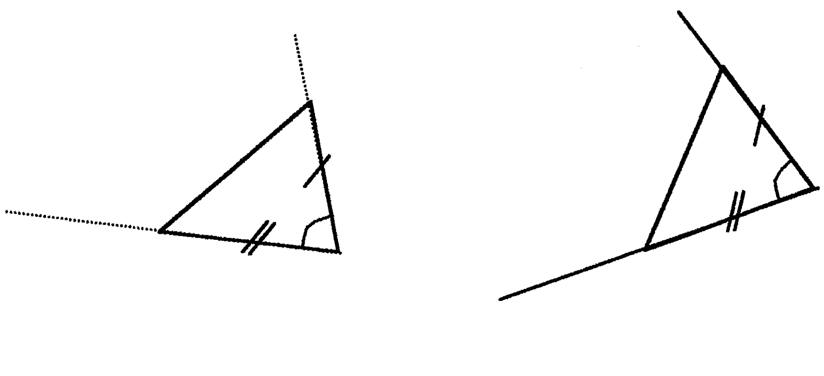


Dans le cas où l'angle Â est aigu, on pourrait malgré tout utiliser cette même procédure mais à condition de pouvoir prolonger la tige.

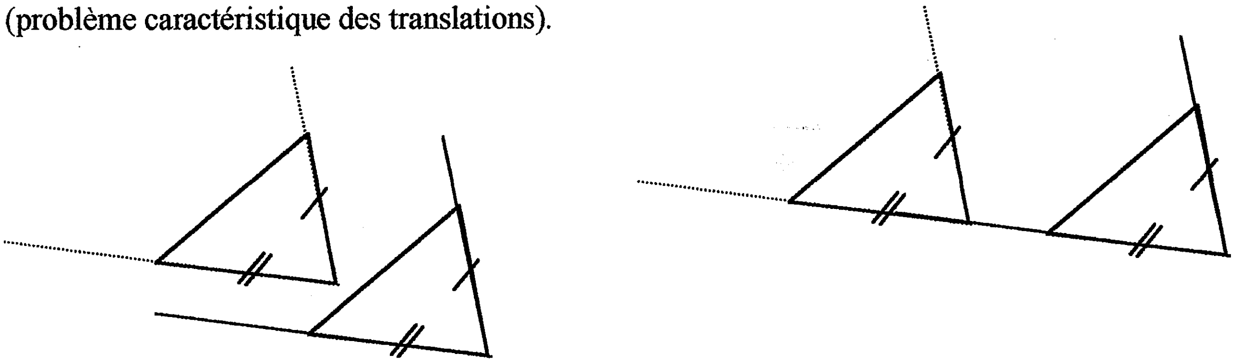


b) Reproduction du triangle à l'extérieur du terrain

Les données du triangle accessibles sont les longueurs des deux côtés, et l'angle formé par ces côtés. Cette procédure renvoie au modèle des isométries positives (translations et rotations).



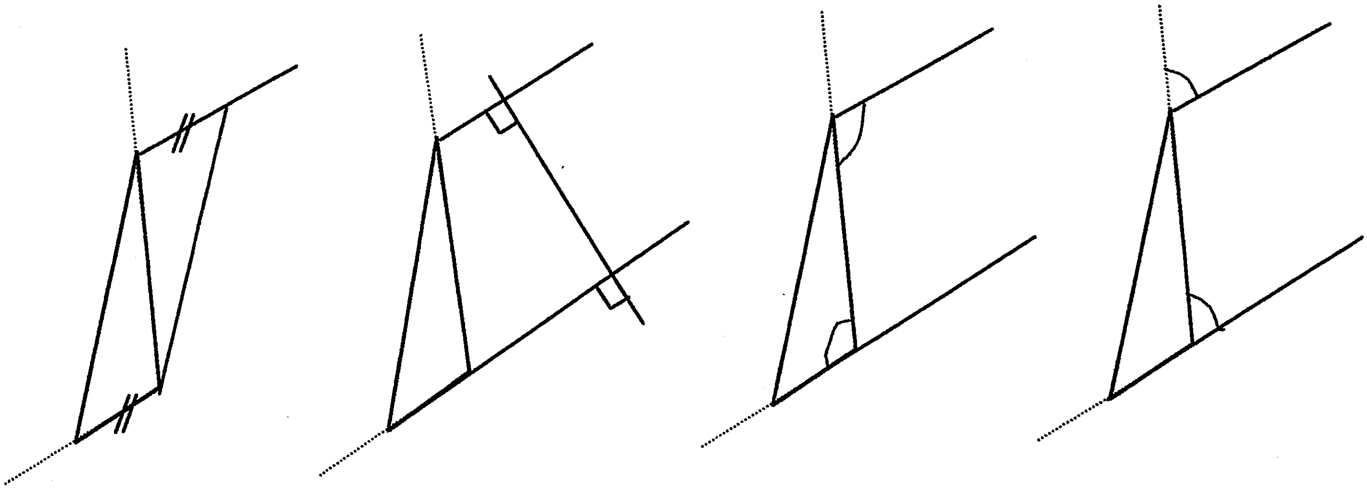
On peut également ne pas faire appel à la notion d'angle et raisonner en terme de parallélisme. Mais le problème spatial est alors de construire une droite parallèle à une droite donnée (problème caractéristique des translations).



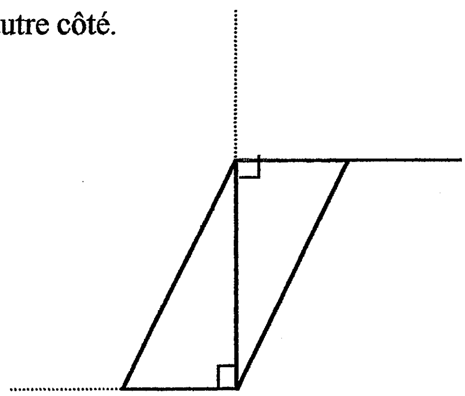
c) Construction d'un parallélogramme dont la tige est un côté

i) Cas où un second côté du triangle est côté du parallélogramme.

Le problème spatial de construction est la parallèle à ce côté passant par le sommet opposé. On peut envisager l'intervention d'un tiers : une perpendiculaire au côté.
Ou bien une détermination de l'angle Â ou de son supplémentaire à 180°.



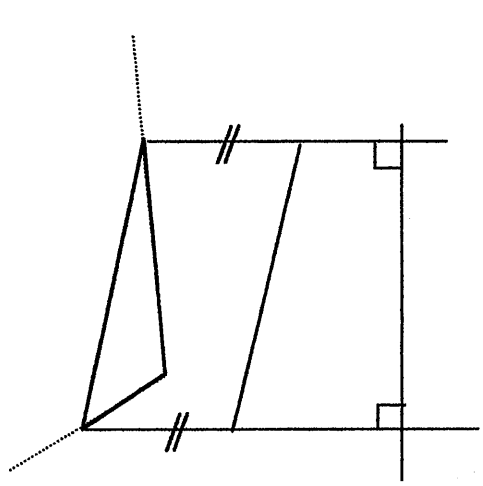
Dans le cas où le triangle est rectangle, ces problèmes ne se posent plus puisque la parallèle au côté se construit comme la perpendiculaire à l'autre côté.

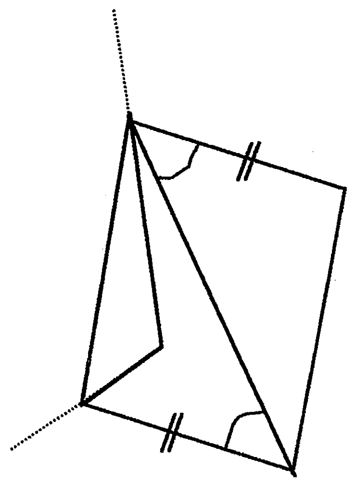


ii) Cas où aucun autre coté du triangle n'est côté du parallélogramme.

Parmi les constructions de parallèles précédentes, la seule construction maintenant possible est celle utilisant une perpendiculaire (figure ci-dessous à gauche).
Nous avons volontairement placé la figure de sorte que les éléments construits soient horizontaux et verticaux, parce que c'est le procédé qui sera utilisé par les élèves. Et cela permet de signifier l'importance d'un rapport pratique aux objets d'un problème que nous voulons résoudre.

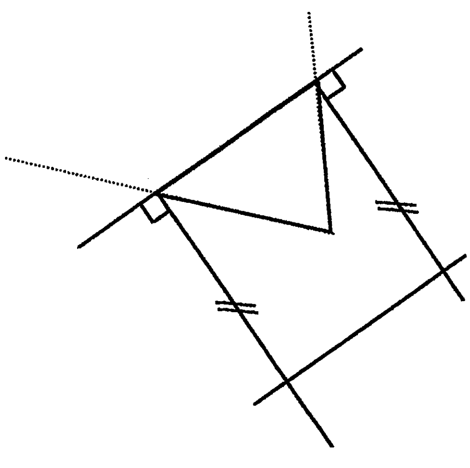
On peut aussi procéder en utilisant une diagonale d'un parallélogramme. Cela revient en fait à construire un triangle arbitraire, dont la tige est un côté et à le reproduire (ici de sorte à obtenir un parallélogramme). C'est le procédé de triangulation (figure de droite).

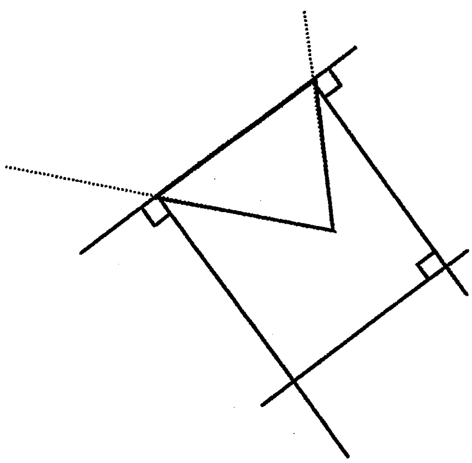




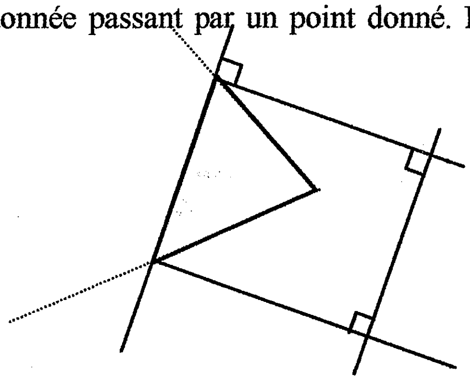
iii) Cas particulier de la construction d'un rectangle dont la tige est un côté

La construction des côtés perpendiculaires à la tige peut se faire par prolongement de la tige et usage d'une équerre. Ensuite ou bien on reporte une longueur arbitraire sur les deux côtés construits, ou bien on construit une autre perpendiculaire.
Rappelons pour ces procédures, que le prolongement de la tige, s'il ne se fait pas à vue d'œil, doit se faire avec un instrument de visée.

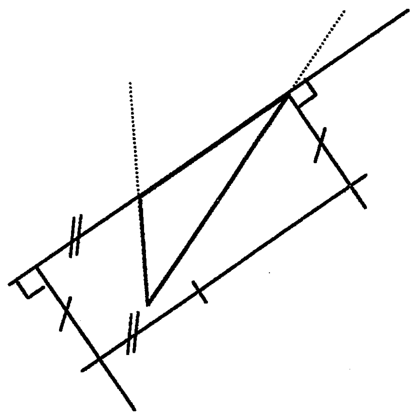




On peut ne construire qu'*une* perpendiculaire à la tige, mais le problème sera ensuite de construire une perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné. Et ici aussi l'instrument de visée est nécessaire.

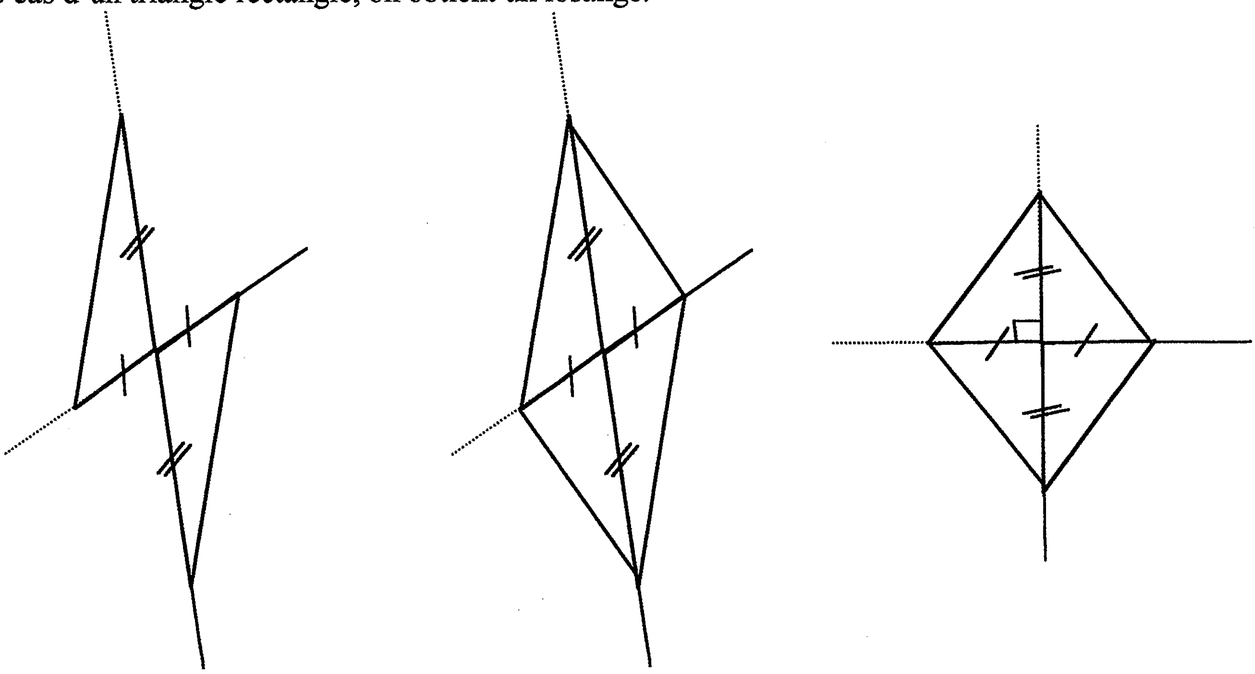


Les deux premières procédures ne sont pas toujours réalisables, dans le cas où le triangle a un angle obtus autre que Â. On peut toujours construire un rectangle, mais la tige ne correspond plus à un des côtés.

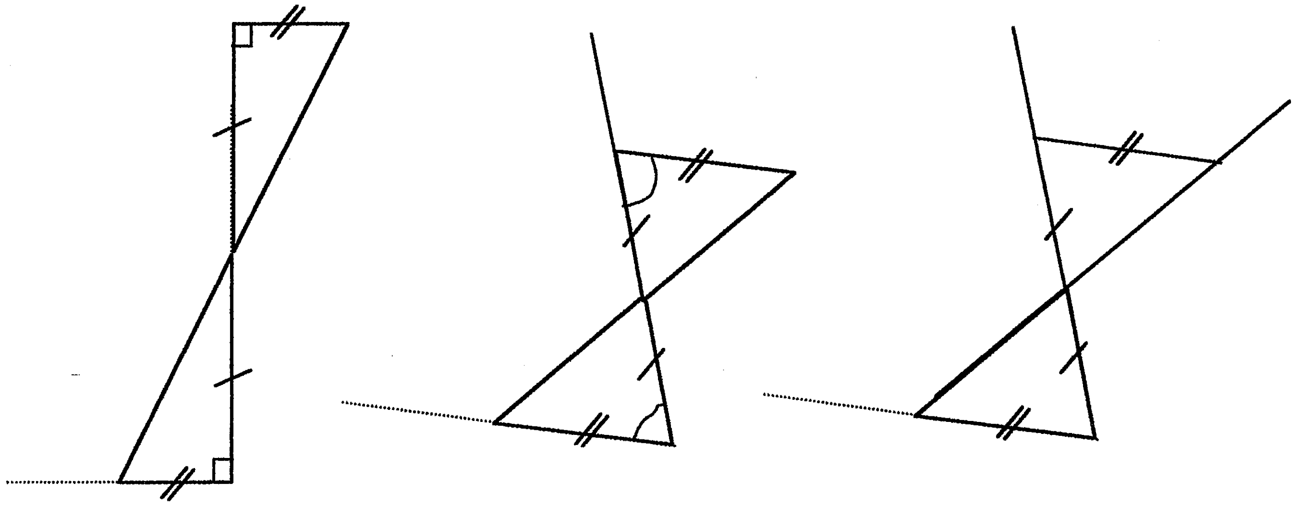


d) Construction d'un parallélogramme par les diagonales (des symétries centrales)

On prolonge les deux côtés du triangle à l'extérieur et on reporte leurs longueurs.
Le modèle mathématique est la symétrie centrale, cependant nous le formulons en terme de construction de parallélogramme, parce que c'est l'objet final que construiront les élèves.
Dans le cas d'un triangle rectangle, on obtient un losange.



On peut également effectuer la construction autour d'un autre sommet, dans le cas d'un triangle rectangle (figure de gauche), mais cela revient à la construction d'une parallèle dans le cas d'un angle Â quelconque (figure centrée).
Si le prolongement de la tige est réalisable, on peut aussi penser à la procédure avec report des longueurs des deux côtés du triangle (figure de droite).



e) D'autres procédures

i) Utilisation d'un agrandissement

Si le terrain est de grande taille dans la cour de récréation, cette procédure demande beaucoup d'espace pour être réalisée puisqu'il faut que l'agrandissement « dépasse » le terrain.

ii) Utilisation d'un plan

Reproduire le terrain à une échelle donnée. S'il est rectangulaire il n'y aura pas de problème de report d'angle. S'il est quelconque ce problème se pose, on peut alors avoir recours à des gabarits. Il faut alors savoir que l'angle est conservé dans la réduction.

Indiquons à présent quelques points concernant la justification et la validation des procédures proposées.

3. Remarques sur la validation

En préalable une question de vocabulaire : nous utiliserons indistinctement les termes « argumentation », « justification », « preuve », pour ce qui relève d'un discours de type géométrique sur une action.

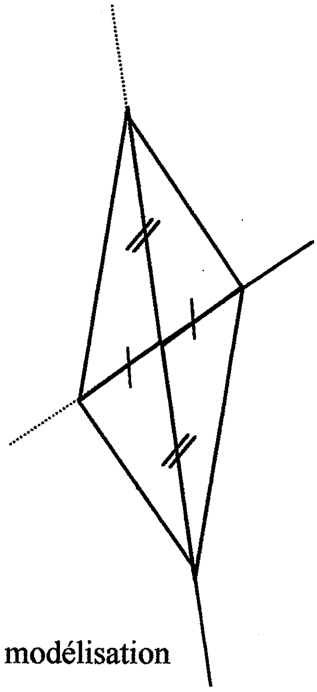
Si nous nous plaçons dans une problématique géométrique, il nous faut distinguer deux points sur lesquels peuvent porter les justifications :

- Les constructions effectives
- La justesse de la procédure par rapport au résultat cherché.

Par exemple pour la procédure « construction d'un parallélogramme »[5], on peut poser deux questions :

- Comment est-on sûr que l'on a bien construit un parallélogramme ?
- Comment est-on sûr que la construction d'un parallélogramme nous fournit une mesure de la longueur de la tige ?

La première question porte sur une preuve de construction effective, la seconde question porte sur une preuve de la justesse du modèle.



- Des arguments concernant la justesse de la construction.
  Qu'est-ce qui justifie que l'on a bien construit un parallélogramme ? « Un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme. » Voilà une justification de la construction.

- Et maintenant, pourquoi cela permet-il d'obtenir une mesure de la tige ?
  A cela nous pouvons répondre en citant une propriété du parallélogramme : « Un parallélogramme a ses côtés opposés de même longueur. » Le côté opposé à la tige a donc même longueur que la tige. Les arguments ici ne concernent plus la construction, mais l'obtention du résultat cherché.

Voici donc un point important permettant d'approfondir la problématique de modélisation et d'en étudier un lien avec la problématique géométrique :

[5] Bien que le parallélogramme ne soit plus au programme du cycle 3. Cela pose d'ailleurs la question des connaissances géométriques utiles pour résoudre des problèmes de modélisation à ce niveau de la scolarité. Nous verrons dans les travaux d'élèves, que le parallélogramme est proposé par les élèves eux-mêmes et que ses propriétés sont bien perçues, sans avoir été un objet d'étude.

Les argumentations fournies à l'intérieur du modèle de résolution permettent une validation interne au modèle.

Cette validation n'a rien à voir avec la validation externe qui consistera à mettre en correspondance une mesure obtenue à partir d'une procédure, et une mesure « réelle » de la tige, c'est à dire obtenue directement.

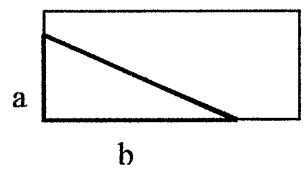
CHAPITRE 4B

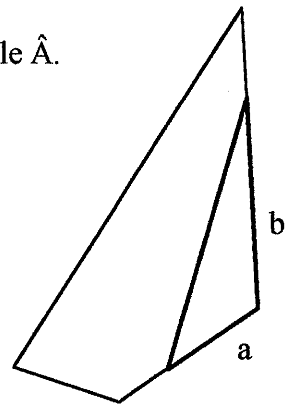
SYNOPSIS DES SÉANCES DE TRAVAIL RÉALISÉES

Les cinq séances menées seront présentées de la façon suivante : dans un premier paragraphe, nous préciserons l'ensemble du déroulement effectif de la séance ; dans un second paragraphe, nous rendrons compte en détail des travaux des élèves.

En petits caractères nous indiquerons déjà quelques remarques et des questions qu'il nous paraît important de faire à chaud (de la lecture), et qui seront pour certaines reprises par la suite dans le chapitre 4C.

Nous ferons souvent référence au triangle défini par la tige et les côtés du terrain. Nous noterons a et b ses côtés, et ferons un abus de notation, en utilisant ces mêmes lettres pour désigner leur longueur, et une mesure de celles-ci.
L'angle formé par les côtés a et b sera appelé l'angle Â.





Les figures représentant les travaux d'élèves seront orientées sur ces pages de la même façon qu'elles l'étaient pour les travaux d'élèves. Cela est important pour les travaux sur papier, et pour la comparaison de certaines méthodes sur papier et dans la cour de récréation, dans la mesure où cela entre dans l'étude des rapports des élèves avec le milieu.

Nous avons nous-même mené la classe lors de ces séances (d'une durée variable d'une heure à une heure trente), en présence du maître, du fait du caractère exploratoire de l'expérimentation, « un pilotage à vue » en fonction de nos questions de recherche et des réactions des élèves. C'est pourquoi nous utilisons la première personne quand nous parlons en tant qu'acteur.

Plan du chapitre

I. Première séance (mardi 9 mai 2000, 8h30)

DANS LA COUR DE RÉCRÉATION
DES QUADRILATÈRES RECTANGLES

1. Déroulement

Dans la cour de récréation cinq rectangles d'environ 3 m sur 5 m ont été construits. Une tige rectiligne de 4 m (formée de deux baguettes de 2m chacune) est située dans chacun des rectangles, et ses extrémités sont situées sur deux côtés consécutifs d'un rectangle.

Sous le préau, dans une grande malle, les enfants peuvent trouver : des mètres, des rouleaux de 3 mètres ; décamètres ; mètre circulaire (roues de 1m de circonférence) ; des règles et équerres d'écoliers ; des règles et équerres de tableau ; des compas de tableau ; de la ficelle ; des craies, feuilles blanches et stylos ; scotch et ciseaux ; des baguettes, et tasseaux de bois (en dehors de la malle).

La présentation de la situation se fait dans la cour de récréation, par choix d'un rapport direct effectif avec le milieu et non un rapport évoqué. Dans la classe, nous avons simplement indiqué que l'on se déplaçait dans la cour de récréation pour réaliser une activité ; et les groupes de travail (par 5 ou 6) ont été constitués.

La consigne

«Nous avons tracé des rectangles au sol. A l'intérieur se trouve une tige située sur deux côtés consécutifs du rectangle. Vous devez déterminer une mesure de la longueur de la tige. Attention, rien ne doit entrer dans le rectangle, ni même le survoler. On peut imaginer des murs transparents tout autour du terrain. A part cette contrainte, vous pouvez faire ce que vous voulez. Si vous avez besoin de matériel, vous avez ici une malle qui en contient. Si vous avez besoin d'autre chose, vous me le demandez. »

Le déroulement

Le travail avec cette première consigne s'est déroulé sur 30 minutes environ, avec une petite pause au milieu pour savoir où chaque groupe en était. Sans parler de leur procédure, ils indiquent s'ils ont déjà obtenu une première réponse. Certain oui, d'autres non, la recherche est donc reprise. Les élèves savent que la mesure de la tige est la même pour tous les groupes.
Tous les groupes s'étaient engagés dans un premier temps dans des procédures numériques.
Lors du second rassemblement, à la fin des trente minutes, tous les groupes annoncent une mesure : 3,72 m ; 4,48 m ; 3,70 m ; 4,18 m ; 5,25 m.

Seul le dernier groupe (qui annonce 5,25) s'était engagé depuis 10 mn dans une procédure géométrique, avec construction à vue d'œil d'un parallélogramme (c'est le groupe que nous appellerons par la suite « le groupe orange »).
A ce moment là, on ne valide pas encore les propositions.
Ce choix volontaire de non validation est justifié par le fait que la connaissance de la valeur de la longueur de la tige rend le problème inintéressant dans cette première phase où il s'agit de prendre en charge le problème. Nous verrons dans les séances suivantes, que cette connaissance n'est plus gênante pour la suite, parce que le problème ne portera plus sur la longueur de la tige, mais sur des méthodes pour l'obtenir.

Voulant engager le travail sur des procédures géométriques, j'introduis alors
Une seconde consigne
« Rechercher des méthodes qui n'utilisent aucun calcul ». Devant l'étonnement des élèves, j'ai été obligée de préciser qu'il ne fallait pas confondre mesures et calculs. J'ai donc indiqué « vous pouvez faire des mesures, mais pas de calculs, c'est à dire aucune opération utilisant ces nombres » et j'ai dû repréciser que s'ils avaient besoin de matériel il y en avait dans la malle ou bien ils nous le demandaient.

La nouvelle recherche a duré à peu près 25 mn. Après une longue interrogation de leur part (qui peut se résumer ainsi : comment peut–t-on mesurer sans faire de calculs ! Si on ne peut pas calculer, on ne peut pas utiliser de nombres, donc pas faire de mesure !), les élèves s'engagent dans de nouvelles résolutions, que nous détaillons dans le paragraphe suivant.
Ensuite nous nous rassemblons à nouveau. Près de chaque rectangle, chaque groupe expose sa méthode, en refaisant si nécessaire les gestes et actions effectués.
On ne valide toujours pas. Je précise que « pour l'instant on se contente de savoir ce que chaque groupe a fait. »

Dernier temps du déroulement
« Maintenant que chaque groupe a exposé sa méthode, y a-t-il un groupe parmi vous qui peut être sûr et certain que sa méthode est correcte et pourrait nous le prouver, nous le démontrer ? »
Ici la discussion s'est engagée uniquement autour de la proposition du groupe orange (construction d'un rectangle).

Ainsi la séance s'est arrêtée sur le travail du groupe orange, mis volontairement sous le projecteur du collectif, dans la mesure où sa procédure fut la seule procédure proposée de type réellement géométrique (c'est à dire faisant intervenir un modèle géométrique cohérent).

Reprenons maintenant en détail les travaux des élèves ; ils ont porté sur l'engagement dans des procédures numériques, puis la recherche d'autres procédures plus ou moins géométriques.

2. Travaux

a) L'engagement dans des procédures numériques

« La maîtresse, elle a dit de calculer ! ».

Voici reformulée à la manière des élèves une partie de la consigne : « déterminer une mesure de la longueur de la tige ». Et dans un premier temps tous les groupes se sont précipités sur les instruments de mesure, pour ensuite s'engager dans des procédures numériques.
Ils ne recherchent pas de formules, mais cherchent à effectuer des calculs qui leur permettraient d'obtenir une mesure de la longueur de la tige. Pour les besoins de la communication ici nous pouvons formaliser leurs calculs par quelques écritures littérales :
a+b ; a/2+b/2 +(b-a) ; (b-a)x2 ; 2b-a

Remarquons que pour certaines valeurs de a et de b ces formules fournissent effectivement une « valeur exacte » de la longueur de tige. (On les obtient en résolvant le système d'équations fourni par chaque formule et l'égalité de Pythagore pour une longueur de tige de 4)

- a/2+b/2 +(b-a) donne une mesure exacte de la longueur de la tige pour : $a = \frac{6\sqrt{6}-4}{5}$ environ 2,14 ; et $b = \frac{2}{5}\left(6+\sqrt{6}\right)$ environ 3,38.
- (b-a)x2 donne une mesure exacte de la longueur de la tige pour : $a = \sqrt{7}-1$ environ 1,65 ; et $b = \sqrt{7}+1$ environ 3,65.
- 2b-a donne une mesure exacte de la longueur de la tige pour : $a = 2,4$ et $b = 3,2$

Mentionnons dès à présent que lors de la seconde séance sur papier, d'autres calculs seront également effectués :
« J'ai pris mon équerre et j'ai mesuré la longueur mais après je me suis dit pourquoi je ne prendrais pas les 2 cm qui restent et j'ai fait 14 + 2 = 16. Moi je pense que c'est ça. » (sur le dessin de l'élève la tige mesure à peu près 16 cm).
Et pour un autre essai : « J'ai mesuré la longueur et je me suis dit pourquoi je ne mesure pas complètement la largeur. Et je soustrais le nombre que j'ai trouvé et je fais L - l = 18-5,50

12,50 (où L et l désignent longueur et largeur du rectangle). La tige mesure 12,50 cm. » (sur son dessin la tige mesure à peu près 12 cm.)
Un autre élève a effectué les calculs suivants : b – (l - a) puis a – (L – b). Il ajoute les deux résultats. Il trouve une longueur de tige de 8,2. (sur son dessin la tige mesure environ 8 cm.)

Je n'avais pas pris la précaution de faire cette étude préalablement, ne sachant dans quel type de calculs les élèves allaient s'engager. Les tiges avaient été disposées sans tenir compte de ces variables numériques (a et b), ce qui pour certains groupes permettait d'obtenir des résultats éloignés de 4 mètres (à 20 cm près au moins) sans toutefois en être trop éloignés.

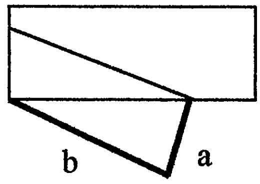
b) Premier usage d'un parallélisme à l'œil

Les élèves d'un groupe (le groupe orange) utilisent des baguettes en bois mises à leur disposition qui mesurent à peu près 1m80 (rappelons que la tige est constituée de deux baguettes d'environ 2m chacune). Ils en mettent deux l'une à la suite de l'autre, et les positionnent à peu près parallèlement à la tige (sans contrôle d'angle) ; cela donne à vue d'œil et grossièrement une tige « comme la tige » située à l'intérieur du rectangle.

Ils prennent une première mesure des deux baguettes bout à bout. Ils annoncent 3m64.
Leur procédure les aurait sans doute satisfaits, et leur recherche aurait pu s'arrêter là, s'ils n'avaient vu un autre groupe réaliser le même genre de configuration au sol.
Ils se décident alors à chercher une autre méthode (c'est l'objet d'un autre paragraphe).

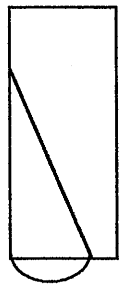
Ici encore nouvelle variable mal fixée (car non étudiée préalablement), la longueur des baguettes de bois, beaucoup trop proche de la longueur d'une demi-tige.

Poursuivons donc avec cet autre groupe, nouvellement inspiré.
Ils placent également des baguettes parallèlement à la tige ; mais c'est pour reporter ensuite les mesures des longueurs a et b, et en faire l'addition.

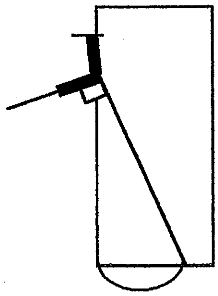


C'est dans l'étrangeté des raisonnements des élèves qu'apparaît une ébauche de connexion entre problématique pratique et problématique de modélisation. Il m'apparaît, que les élèves de ce groupe sont encore dans une problématique pratique calculatoire, et cependant la vision de la construction d'une ligne parallèle à la tige faite par l'autre groupe, engage l'intuitif vers l'usage d'un modèle.

c) Et si on faisait pivoter la tige ?



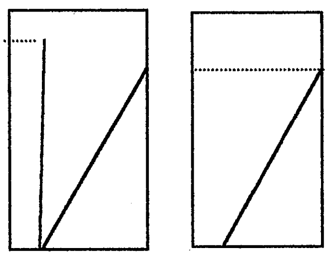
« On a cherché le point de départ comme si on tournait.
Et on s'est aperçu que ça arrivait là. » (sur le sommet du rectangle)
Les élèves annoncent donc la mesure de b.
Je suis intervenue pour indiquer que « lorsqu'on tournait, comme la tige est solide, il faut faire attention à l'autre extrémité : Est-elle fixe ? Tourne-t-elle aussi ? Comment ? » … je les ai laissé discuter.



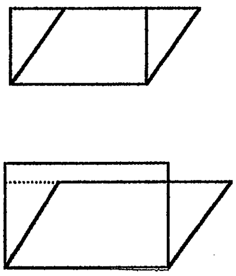
Ils reprennent leur recherche.
Comme ils avaient tracé un segment à angle droit avec la tige, pour une méthode antécédente, et pris une mesure arbitraire dessus, ils ont reporté cette mesure sur le côté du rectangle en annonçant que c'était là où arrivait l'autre extrémité.

Les élèves prennent conscience semble-t-il du mouvement de l'ensemble de la tige, mais encore ici font appel à une mesure arbitraire sans lien avec les objets du problème.

Un autre élève, lors du moment d'argumentation, fera également référence au fait de faire pivoter la tige, et de même que les élèves précédents, ne prendra pas en compte la conservation de sa longueur :
« On fait comme si la tige était droite et on mesure là. »
La tige droite, c'est la tige parallèle à l'un des bords en fixant une des extrémités. Dit autrement, c'est une rotation de la tige autour d'une de ses extrémités, de sorte qu'elle soit parallèle à un bord.
Première figure pour ce que l'élève modélisait,
deuxième figure pour ce qu'il a fait effectivement.



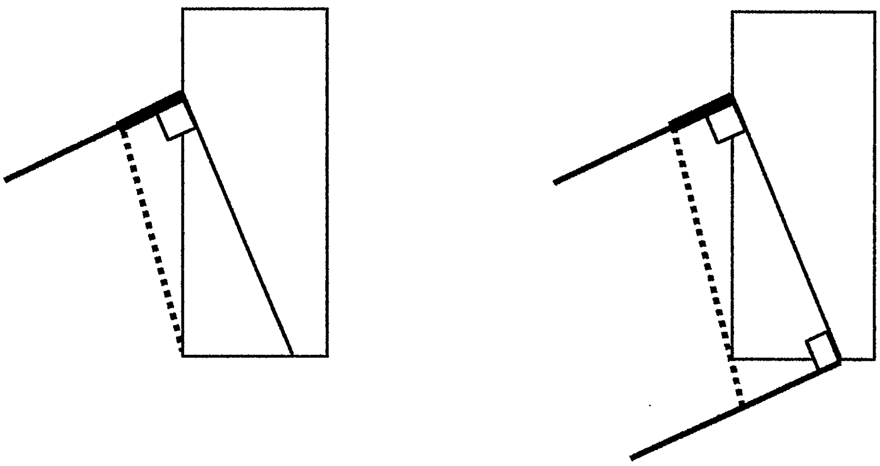
Il nous a fallu utiliser une ficelle pour représenter la tige, et la faire pivoter comme indiqué, pour qu'il soit alors clair pour cet élève que la tige n'arrivait pas à la « longueur » indiquée.



L'observation de cette conception n'est pas nouvelle : M-J. Perrin et R. Douady[1] la mentionnent à l'occasion de leur travail sur les aires de surfaces planes. Les élèves considèrent le parallélogramme comme un rectangle penché (le rectangle que l'on obtiendrait si le parallélogramme était articulé). Ils pensent par exemple que le parallélogramme de côté 6 et de hauteur correspondante 4, avait une aire plus grande que le rectangle de côtés 6 et 4.

d) Construction d'angles droits

Voici deux figures qui rendent compte du travail d'un groupe. Le segment en trait très gras représente un trait et une longueur fixée arbitrairement, mais très prégnante pour leur méthode. Ils considèrent les longueurs en pointillés comme équivalentes à la longueur de la tige. D'abord en joignant un sommet du rectangle (première figure) ; puis la ligne passant par ce même sommet du rectangle et joignant une seconde ligne construite à angle droit avec la tige. Le contrôle des angles droits se fait à vue.



Il semble qu'ici les élèves saisissent l'idée de la construction d'un équivalent à la tige, extérieur au terrain. Dans la seconde construction, l'idée du rectangle n'est pas très loin, il manque le contrôle des longueurs égales sur les lignes construites. C'est un des élèves de ce groupe qui sera très vigilant lors du compte rendu du groupe orange (construction d'un rectangle) sur l'égalité de ces longueurs !

D'autre part l'aspect visuel de vague trapèze isocèle que leur fournissait leur construction au sol, les éloignait peut-être de l'image d'un rectangle.

---

[1] DOUADY R., PERRIN-GLORIAN M-J. (1989*) Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane,* Educational Studies in Mathematics Vol. 20 n°4.

Les élèves sont (implicitement) dans l'élaboration d'un modèle, mais non encore adapté.

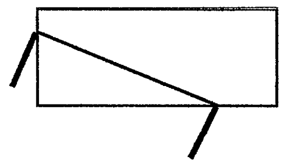
Le problème de la construction d'angles droits par rapport à la tige sera repris ultérieurement. Il est important dans la mesure où la contrainte qui fonde le problème (le terrain inaccessible) n'est plus respectée.

e) Construction d'un rectangle : le travail du groupe orange

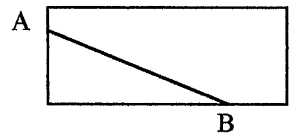
L'ensemble de ce travail sera repris dans le chapitre 4C, dans une étude plus générale des rapports des élèves avec le milieu, c'est pourquoi nous nous contenterons ici d'en faire la description.

La mise en place de baguettes parallèles à la tige, semble avoir fait tourner les recherches du groupe orange vers le recours à des figures géométriques.

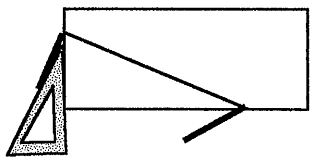
Ainsi, ils positionnent à nouveau les baguettes de sorte à obtenir visuellement un rectangle dont la tige est un côté. Ils ne mesurent pas. Sans doute est-ce une position pour s'assurer de la justesse de la modélisation. Ils décident de construire rigoureusement leurs angles droits, avec une grande équerre jaune de tableau. Et c'est là que les choses se compliquent…



Pour la clarté de la lecture nous nommons A et B les extrémités des côtés a et b, communes avec les extrémités de la tige.

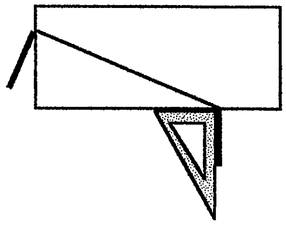


Premier temps :
ils placent l'équerre en A : angle de 30° entre la baguette et le côté du rectangle, angle droit le long de ce côté.
Puis de même en B : angle de 30° entre la baguette et la tige.
« Mais, là ça ne fait pas un rectangle » remarque fortement un des élèves.
Alors …



Nous repérons ici aussi une autre variable influente pour le recours à une problématique pratique de construction de l'angle droit : l'angle formé par la tige et les cotés du terrain. De fait, pour ce groupe, le placement de leur équerre à 30° à l'extérieur et en complément de l'un de ces angles, fournit pour l'œil un angle à peu près droit.

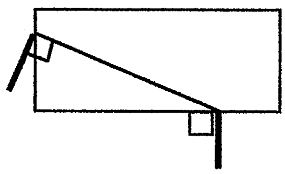
Second temps :
ils cherchent à positionner autrement l'équerre en B ; la font pivoter ; remettent la baguette à vue d'œil à angle droit avec la tige, puis l'enlèvent. Finalement ils placent l'équerre à angle droit avec le côté du rectangle et la baguette.



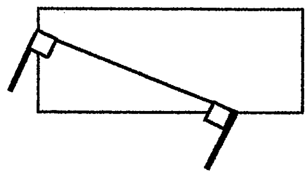
Troisième temps :
ils repartent en A pour replacer l'équerre et la baguette, car après cette manipulation ils considèrent qu'en A elles sont mal placées. Mais finalement ils les repositionnent comme précédemment (angle de 30°). Le maître est là au moment où ils manipulent l'équerre, il demande « vous êtes sûrs que c'est comme ça qu'on fait pour construire un angle droit ? ». Les élèves retournent l'équerre, la font pivoter … puis finalement la positionnent comme précédemment. Le maître s'en va.

L'instrument « gabarit de l'angle droit » est détourné au profit d'un «gabarit d'angle à 30°» pour construire un angle droit !

Ils reprennent l'équerre, puis placent l'angle droit cette fois ci entre la tige et la baguette. « T'as pas le droit de rentrer sur le terrain ». En effet pour cette réalisation, l'équerre est en partie dans le terrain. Ils s'arrangeront entre eux pour ne pas trop le faire savoir. Et continuent.

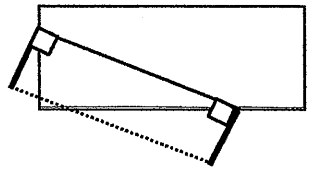


Quatrième temps :
« Et là-bas, ce n'est pas le même angle droit », l'élève désigne en B. Ils repartent avec l'équerre en B. L'élève place l'équerre comme avant.
« Ben si c'est un angle droit !»
Un autre insiste pour dire que ce n'est pas le même angle que celui construit en A.
Celui qui manipule après quelques tâtonnements place bien la baguette à angle droit avec la tige, en positionnant l'équerre correctement, toujours d'ailleurs à l'intérieur du terrain.
« Ben, ça y est, là ça fait bien un rectangle. »



Mais l'aventure n'est pas pour autant finie !
Cinquième et dernier temps :
ils utilisent le décamètre, pour relier les deux extrémités des baguettes. La dimension de ces baguettes donne l'impression que la ligne joignant

leurs extrémités à l'extérieur du terrain passe par le sommet de rectangle. Les élèves vont bien s'appliquer pour qu'il en soit ainsi. En réalité la ligne passait même à l'intérieur du terrain, comme sur la figure ci-contre. Plusieurs reprises sont nécessaires pour faire droite cette ligne qu'ils ne trouvaient pas bien droite au début, et pour cause. Ils s'y mettent à trois élèves, deux à chaque extrémité, et un au sommet du rectangle, pour faire une courbure très proche d'une droite.



Ils peuvent alors lire une mesure sur le décamètre : ils annoncent 4m06.
La tige mesure 4 m.

Nous détaillerons dans un paragraphe du chapitre 4C, le moment d'argumentation de la fin de la séance.

Indiquons seulement que lors du compte rendu (simplifié et direct) de cette procédure à l'ensemble de la classe, personne n'a fait mention du fait que les élèves avaient placé l'équerre à l'intérieur du terrain pour placer les baguettes à angle droit. C'est seulement la semaine suivante, qu'un élève du groupe orange dira :
« En fait, on n'avait pas le droit de mettre l'équerre dans le terrain la dernière fois, donc notre méthode elle n'était pas bonne ? ».
Et j'ai répondu :
« Effectivement matériellement la méthode n'est pas correcte, mais mathématiquement elle l'est. C'est un problème important, de voir la différence entre ce qu'on peut faire d'un point de vue mathématique ou géométrique, et puis après de voir sur le terrain comment on va s'y prendre. » Ce petit discours qu'il faudra construire (il est au cœur de notre problématique), justifiait l'absence de contestation de la part de tous, des élèves et de moi-même, de la méthode du groupe orange lors de la première séance.

Voici maintenant la présentation de cette seconde séance qui commençait donc sur cette remarque d'articulation du modèle et de sa mise en œuvre pratique relativement aux contraintes du problème.

II. Deuxième séance (mardi 16 mai 2000, 8h30)

DANS LA CLASSE, SUR FEUILLE
DES QUADRILATÈRES RECTANGLES

1. Déroulement

La consigne

« Nous allons partir du même problème : un terrain rectangulaire, une tige à l'intérieur, située sur deux côtés consécutifs du rectangle, et on ne peut toujours pas entrer sur le terrain, ni rien passer au-dessus et en dessous.
On doit encore aujourd'hui chercher des méthodes pour trouver une longueur de la tige. Sauf qu'aujourd'hui, on ne va pas travailler dans la cour, on va travailler ici dans la classe, cela nous permettra de prévoir pour la semaine prochaine quand on va retourner dans la cour comment on s'y prendra. On testera les différentes méthodes que vous aurez mises en place aujourd'hui. »
Les élèves doivent construire eux-mêmes un rectangle et y tracer un segment quelconque à l'intérieur, appuyé sur deux cotés consécutifs du rectangle, pour représenter la tige.

Les élèves travaillent individuellement durant 25 minutes, avec des interactions assez fréquentes avec les voisins, puis je leur demande de rédiger sur une feuille A3 les procédures qu'ils ont trouvées, pour une utilisation collective. Je précise qu'il ne s'agit pas de rendre compte par un texte de la procédure, mais d'utiliser des dessins.
En fait le travail sur feuille A3 ne s'est pas fait pour tous les élèves dans la mesure où la plupart continuaient à chercher.

Ensuite nous avons procédé à une mise en commun sélective de certaines procédures.
C'est ici, encore volontairement, que j'ai choisi de faire intervenir cinq élèves proposant cinq méthodes différentes :

- Construction par symétrie (axiale) par rapport à un côté du rectangle
- Reproduction du rectangle et du segment tige
- Construction d'un parallélogramme (par les côtés)
- Construction d'un losange (symétrie centrale par rapport au sommet de l'angle droit du triangle)
- Proposition de réalisation d'un plan, en convertissant en centimètres les mesures réelles en mètres.

Entrons dans le détail des travaux des élèves, sur les procédures précédemment citées, et quelques autres. Elles sont prises dans l'ordre du plus grand effectif d'élèves les ayant utilisées[2]. C'est pourquoi un paragraphe entier sera consacré à la reprise de la procédure de construction d'un rectangle (plus de la moitié des élèves) et seront rassemblées dans un second paragraphe les autres procédures géométriques émergentes.

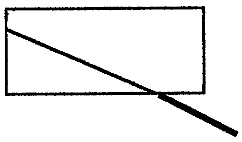
2. Travaux

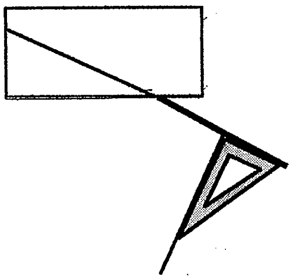
a) Reprise sur papier de la procédure « construction d'un rectangle, dont la tige est un côté »

Plus de la moitié des élèves, dans un premier temps, reprennent sur papier la méthode du groupe orange. Ils construisent « un rectangle » à l'extérieur du terrain, dont la tige est un côté. Ils ont tous pris en compte la remarque de l'élève en début de séance sur l'impossibilité de placer l'équerre à l'intérieur du terrain.

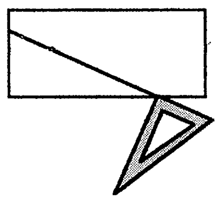
Pour la construction de l'angle droit à l'extérieur, les élèves prolongent le segment de la tige :

- Soit à vue d'œil pour l'alignement, ils tracent le prolongement, puis placent l'équerre le long de ce segment, à angle droit avec la tige, ou plus loin





- Soit à vue d'œil pour l'angle droit, ils placent l'équerre à l'extérieur, un côté de l'angle droit est un prolongement de la tige, l'autre côté est à angle droit avec la tige.

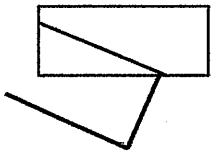


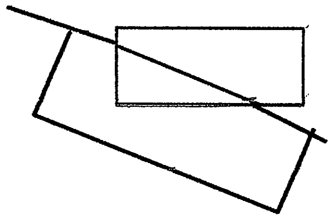
Pour la suite, le contrôle des autres angles droits du rectangle à construire se fait pour certains élèves à vue d'œil, sans utilisation de l'équerre.

---

[2] Elles n'ont pas fait l'objet d'une validation interne pour ce qui concerne la justification des constructions. Et d'autre part leur adaptation au résultat cherché s'est établi sur le mode de l'évidence.

De même pour les longueurs des côtés, le contrôle se fait approximativement par rapport à la longueur observée de la tige.



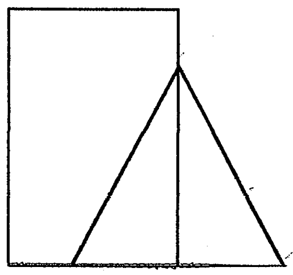


Remarquons que pour la plupart des élèves, le rectangle construit ne touche plus le sommet du rectangle initial, comme ce fut le cas pour le groupe orange sur le terrain. Seule une élève faisant partie de ce groupe conserve cette contrainte sur son dessin.

Constat de la prégnance des objets du problème, pour la résolution sur papier et pour la résolution spatiale dans la cour de récréation. Les rapports établis par les élèves avec ces objets ne sont pas les mêmes dans ces deux environnements.

b) Emergence de procédures géométriques

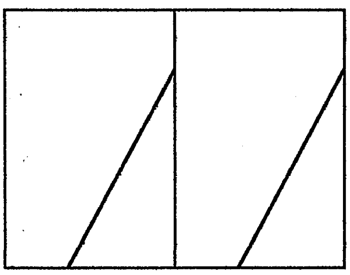
i) Utilisation de la symétrie axiale

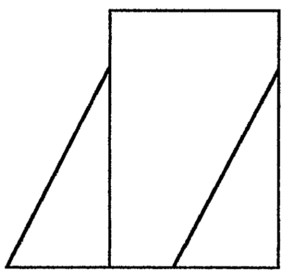


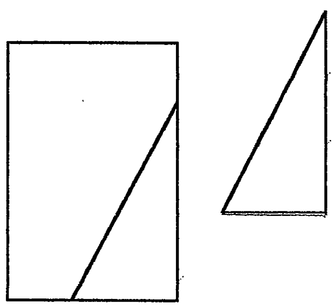
Six élèves l'utilisent pour produire des schémas comme celui reproduit ci-contre.
Ils prolongent un des côtés (le plus petit en général), et reportent la longueur a. Ce report se fait pour certains par mesure, pour d'autres à vue d'œil.

ii) Reproduction du terrain et de la tige à l'extérieur

Trois élèves.
Seule la production d'un élève indique qu'il se dégage du rectangle pour ne tenir compte que des longueurs des côtés du triangle (et de l'angle droit, troisième figure)





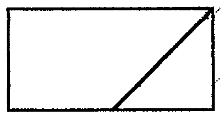


Ici encore, question relative à la prégnance des objets du problème ; qu'est-ce qui est retenu par les élèves comme élément suffisant d'un modèle de résolution ?

iii) Construction d'un losange

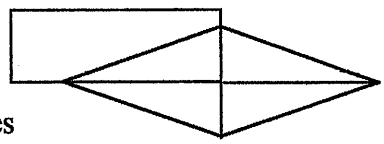
Deux élèves.

Un élève fait un premier schéma en plaçant les extrémités de la tige à un sommet du rectangle, et l'autre au milieu d'un côté (a et b valaient respectivement 5 et 6 cm sur son dessin).



Sans doute cette position de la tige n'est pas sans lien avec la connexion à la figure losange, ou plutôt avec les éléments « diagonales » bien situées horizontale et verticale comme pour un positionnement standard d'un losange.

Ensuite sur ma demande, il reprend sa procédure pour une configuration initiale de la tige identique aux contraintes initiales (aucune extrémité ne se trouve sur un sommet) et telle que le losange obtenu soit beaucoup plus aplati que celui qu'il avait obtenu la première fois.



La surprise de voir que sa procédure de prolongement et de report des longueurs marche encore est impressionnante. Nous reparlerons de son « Ah ouais, ça marche aussi ! ».

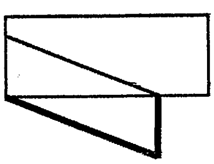
La question de la généralité d'une procédure n'est pas présente pour les élèves naturellement, que leur procédure soit relative à un modèle géométrique cohérent (comme ici) ou incohérent (comme les calculs numériques). C'est sûrement une question fondamentale, au sens de liée aux fondements.

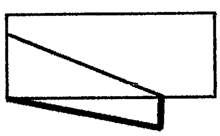
iv) Construction d'un parallélogramme

Un élève.

Il reporte la longueur a, à angle droit avec le côté du rectangle.

Il fait un autre schéma, en grand format (pour la mise en commun), mais se retrouve bloqué par le fait que la longueur à reporter sort de la feuille. Cela lui donne un trapèze dont il n'est pas du tout content, alors il est venu exposer avec son premier schéma.





Ici, à nouveau constat classique de la difficulté à se dégager des objets matériels délimitant ici l'espace de travail, l'environnement. L'environnement est plus prégnant pour l'élève que son modèle de référence.

v) Construction d'un schéma

Un élève.
« Je n'arrive pas à expliquer sur ma feuille ». Et pour cause.
Il explique oralement : il veut faire un schéma, les longueurs du vrai terrain en mètres seront transformées en centimètres sur le schéma.

Il est intéressant de constater ici que l'élève considère le problème spatial, et non pas le problème sur la feuille de papier induit nécessairement par l'usage de la représentation du terrain et de la tige. Tous les autres élèves se sont placés au contraire face au problème sur la feuille de papier.
Par contre sait-il ce dont il a besoin pour faire son schéma ? quelles sont les mesures utiles à prendre sur le terrain ? On ne peut le dire.

Passons maintenant à la troisième séance, pour laquelle le terrain ne va plus être réctangulaire mais de forme quelconque.

III. Troisième séance (mardi 23 mai 2000, 8h30)

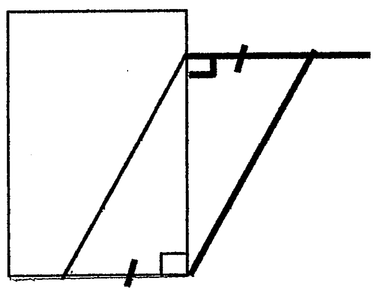
DANS LA CLASSE, SUR FEUILLE
DES QUADRILATÈRES QUELCONQUES

1. Déroulement

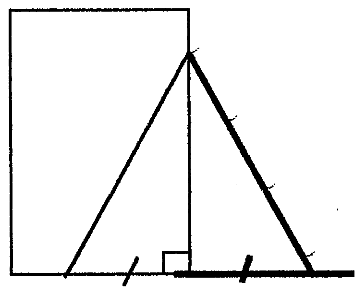
Contrairement à ce qui a été annoncé lors de la séance précédente, nous sommes restés en classe. Le nombre de séances pour ce dispositif étant limité, nous avons fait ce choix, de ne pas aller dans la cour ni mettre en œuvre les procédure trouvées sur papier, mais de passer directement à une recherche dans l'environnement papier avec une autre forme de terrain. Ce choix sera rediscuté dans les analyses du chapitre 4C.

J'avais repris sur des feuilles A3, dans un format lisible du fond de la classe, les procédures exposées par les élèves dans les séances précédentes (sauf la construction d'un rectangle), de la façon suivante :

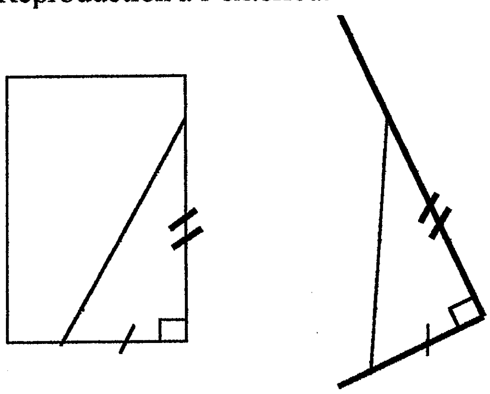
Construction d'un parallélogramme



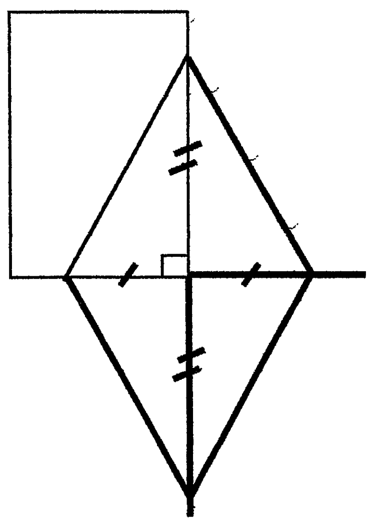
Symétrie par rapport à un côté du terrain



Reproduction à l'extérieur



Construction d'un losange



Nous n'avons pas repris l'idée du plan, bien qu'elle soit tout à fait pertinente. A la fois pour une contrainte de temps, mais surtout parce que S&B en disent long sur cet aspect des choses.

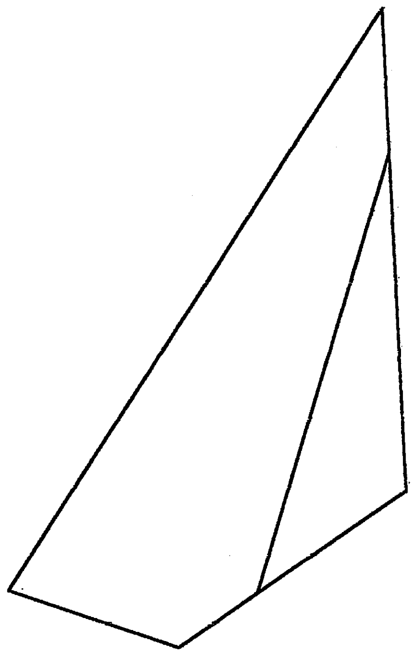
Les quatre grandes feuilles sont donc affichées au tableau.

La consigne

« Voilà quelques méthodes qui ont été présentées la semaine dernière. Aujourd'hui on va reprendre ces méthodes, mais sur un terrain qui n'est plus rectangulaire. L'angle des deux côtés supports de la tige n'est plus un angle droit. Pour ce nouveau terrain vous allez essayer d'utiliser les méthodes précédentes, voir si elles fonctionnent, ce que cela change par rapport à la semaine dernière. »

Le terrain sur lequel travaillent les élèves est reproduit ci-contre (échelle à peu près un demi, on trouvera la figure à échelle 1 en annexe 1)

En fait les élèves ont plutôt interprété une autre consigne (qui bien sûr se justifie a posteriori , vu les changements ou non de contrat) : la recherche de méthodes pour le même problème sur ce nouveau terrain. (C'est en effet la consigne qu'il faudrait donner pour une reprise.) La recherche a duré environ 45 minutes.



2. Travaux

a) Constructions par symétrie axiale

Les productions des élèves se regroupent ici suivant quatre catégories.

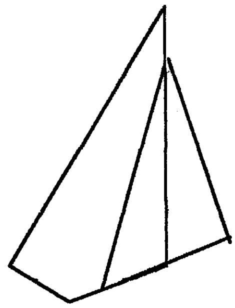
Celles provenant directement du changement d'angle, et de la reprise de procédures valables pour le terrain en forme de rectangle.

Celles relatives à une recherche par tâtonnement, avec contrôle visuel des constructions.

Celles faisant référence à des figures symétriques connues (losange, triangle isocèle).

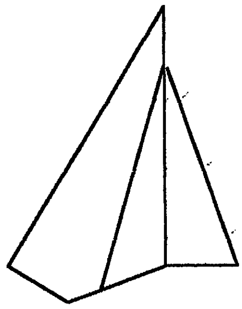
Celles incluant le terrain et la tige dans des dessins « images de symétrie ».

Nous allons rendre compte de chacune d'entre elles.



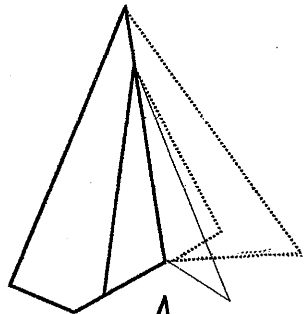
i) Influence de la procédure sur terrain rectangulaire

Beaucoup d'élèves ont commencé par effectuer le prolongement d'un côté et le report de la longueur, comme sur la figure ci-contre.



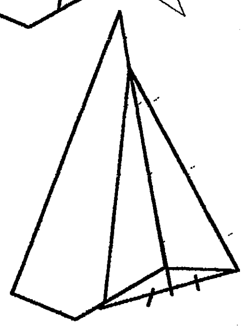
Certains élèves reportent la longueur a, à angle droit avec un coté du terrain.

Ou bien tout seul, ou bien sur ma demande de vérification, ils se rendent compte que cela ne permet pas d'obtenir une longueur de la tige. C'est là qu'ils s'engagent dans d'autres essais.



ii) Des tâtonnements

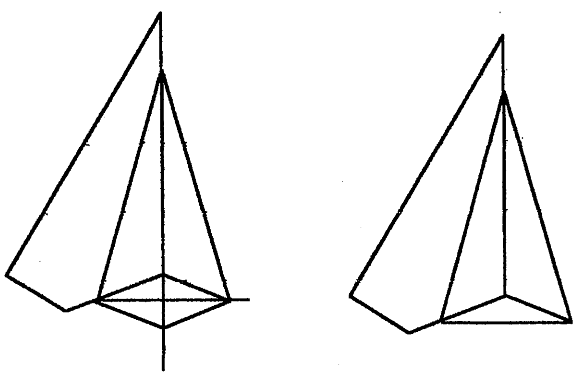
Certains enfants parlent de symétrie, d'autres non, mais l'ensemble cherche à construire le symétrique par rapport au côté. Pour tous les élèves les essais se font à vue d'œil ; pour la plupart, plusieurs essais sont nécessaires pour arriver à une construction, à peu près acceptable pour l'œil.



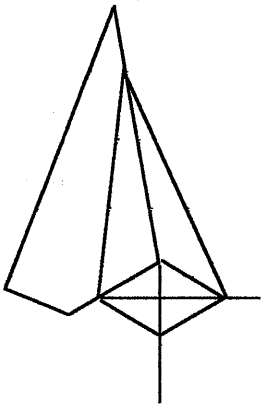
Un seul élève produit la figure ci-contre, où « l'équidistance » à l'axe est notée avec des symboles, sans que l'orthogonalité ne soit tout à fait respectée (une dizaine de degré d'écart sur le dessin réel).

iii) Référence à des figures de base admettant un axe de symétrie

On trouve parmi les productions des élèves les constructions suivantes, qui s'appuient sur la reconnaissance de figure de base comme le losange ou le triangle isocèle, figures quasi prototypiques de « figures symétriques » :



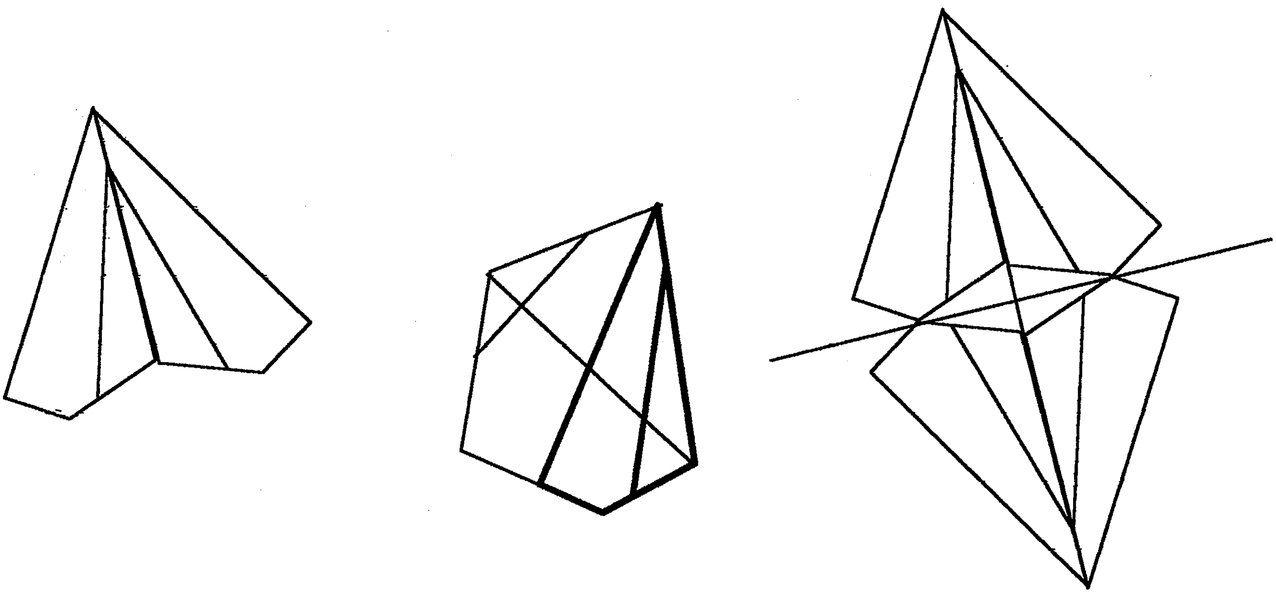
Cependant la majorité des productions obtenues révèlent un manque de prise en compte de l'orientation du terrain sur la feuille.



Evidemment nous retrouvons ici un phénomène déjà souvent mis en évidence, la prégnance de l'horizontalité et de la verticalité. Il sera repris ultérieurement dans cette recherche, au regard des procédures « symétrie » développées dans la cour de récréation ; et réinterprété.

iv) Inclusion du terrain et de la tige dans une « image de symétrie »

Les élèves, à défaut de réussir à construire un triangle symétrique, vont construire un terrain symétrique, ou une figure plus grande encore, présentant (à peu près) des axes de symétrie. Nous avons trouvé trois images de ce type :



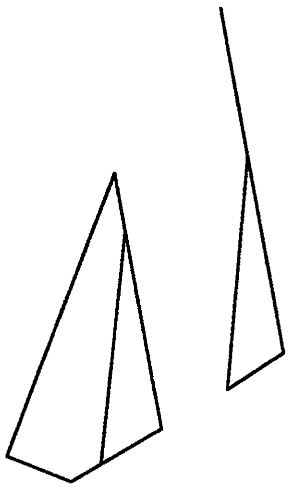
L'environnement papier fonctionne ici comme un *environnement d'images*, et non pas comme un environnement géométrique.

b) D'autres constructions

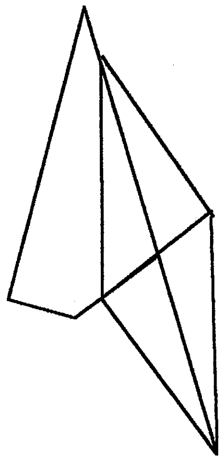
- Pour la reproduction du triangle à l'extérieur :

Les élèves tiennent bien compte des longueurs des deux côtés.
Mais le repérage de l'angle se fait implicitement par le contrôle de la vue.
Quand je demande aux élèves ce qu'il leur faut pour reproduire le triangle, les deux longueurs suffisent.
Et les constructions qu'ils produisent sont somme toute très efficaces. Ils obtiennent des mesures de la longueur de la tige correctes à quelques millimètres près.

Un seul élève a fait sa construction en utilisant un parallélisme aux côtés du terrain (comme sur le dessin ci-contre)

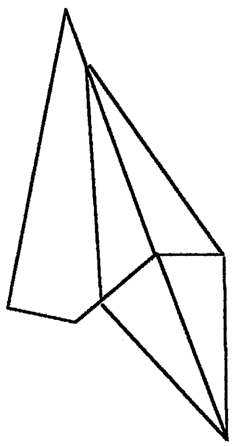


- Pour la reprise de la construction d'un losange sur terrain rectangulaire :

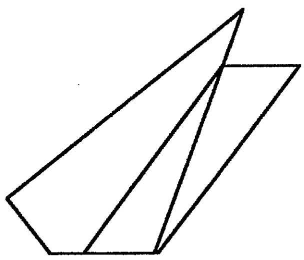


La plupart des élèves ici ont implicitement interprété le schéma pour le rectangle, comme une procédure consistant à prolonger les côtés du terrain et à reporter les longueurs a et b.
Ils obtiennent alors un parallélogramme, certains affirmant encore que c'est un losange, ce qui sera l'occasion d'un petit débat durant lequel nous en profiterons pour indiquer ou rappeler des propriétés géométriques de ces objets.
Par ailleurs ils mesurent au bon endroit.

Il est à mentionner également quelques élèves voulant (selon la consigne) utiliser les procédures issues des recherches sur terrain rectangulaire, et donc construiront un losange. Cette construction se fait à vue d'œil comme sur la figure ci-contre.

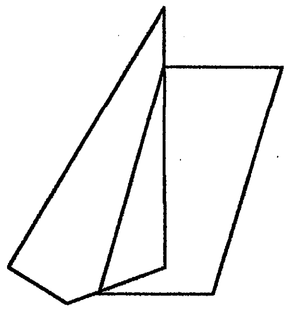


- Pour la construction d'un parallélogramme



Un élève, le même qu'à la séance précédente, construit un parallélogramme en prenant appui sur un côté du terrain. Il prend une mesure de a et reporte la longueur à vue d'œil parallèlement à a.

Quelques autres construisent des parallélogrammes « extérieurs au terrain ».
Le parallélisme se fait toujours à vue d'œil, ou par référence à l'horizontale.
La plupart des élèves ne contrôlent pas l'égalité des longueurs des deux côtés opposés construits.



IV. Quatrième séance (mardi 13 juin 2000[3], 8h30)

1. Déroulement

1ère Partie
DANS LA COUR
DES QUADRILATÈRES QUELCONQUES

Quatorze quadrilatères sont dessinés dans la cour de récréation, d'une envergure de 6 mètres carrés environ. Les élèves travailleront par deux ou trois.

La consigne

« J'ai dessiné au sol des quadrilatères quelconques, avec des tiges à l'intérieur représentées par des traits droits dessinés à la craie rouge. Nous allons aujourd'hui tester les méthodes que vous avez étudiées à la séance précédente. Vous devez tester deux méthodes : la première est imposée, il s'agit de la symétrie axiale par rapport à un des cotés du rectangle ; la seconde méthode est laissée à votre choix. Vous aurez à peu près 30 minutes pour travailler, ensuite nous retournerons en classe, et là sur feuille, vous devrez rendre compte des deux méthodes utilisées. »

« Comme à la première séance, vous disposez du matériel qui se trouve sous le préau. Si vous avez besoin d'autre chose vous me le signalez. »

2ème Partie
DANS LA CLASSE, SUR FEUILLE
DES QUADRILATÈRES QUELCONQUES

Le même quadrilatère qu'à la séance 3 est donné aux élèves, en plusieurs exemplaires.
Ils doivent indiquer les constructions à faire pour chacune des méthodes qu'ils ont étudiées dans la cour.
En fait la recherche dans la cour fut assez courte en temps, et tous les groupes n'ont pas pu expérimenter deux méthodes au moins. Par contre sur leur feuille de papier ils rendent compte de plusieurs constructions. Je suis intervenue assez souvent pour repréciser que j'attendais malgré tout deux propositions. On obtient donc des constructions sur feuille, non nécessairement réalisées dans la cour.

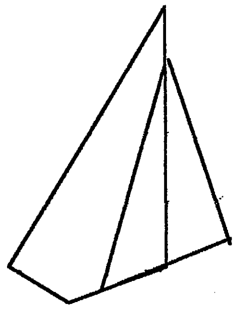
2. Travaux

---

[3] Un long intervalle de temps s'est écoulé, pour des raisons externes à l'expérimentation.

a) Dans la cour, les procédures par symétrie axiale

La plupart des groupes reproduisent l'erreur classique de prolongement d'un côté, comme sur la figure ci-contre.
Avec certains groupes je fais référence au pliage, comme cela a pu être le cas à la séance précédente, en travaillant sur papier, pour rappeler que cette construction n'est pas valide. Cependant ici cette évocation reste inadaptée. Avec d'autres groupes, nous entrons sur le terrain pour comparer la mesure du segment construit et de la tige. La différence est suffisamment sensible pour les convaincre qu'il y a un problème.



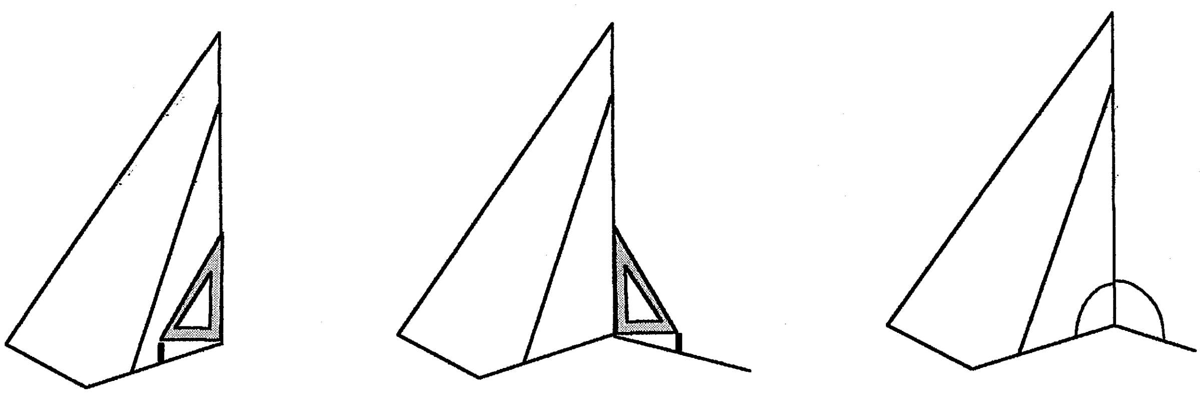
La différence de taille agit évidemment sur l'écart des mesures. Sur papier, cet écart est relativement faible, tandis que dans la cour, bien qu'il ne soit pas très important, il est un peu plus visible. Parfois cet écart n'est pas un argument pour remettre en cause une procédure (cf. les procédures numériques), parfois il l'est comme ici.

Les élèves repartent donc dans d'autres recherches :

- Deux groupes ont repris la construction à vue d'œil, après plusieurs essais, avec une bonne estimation visuelle.

- Damien et Marine : le report de l'angle Â

Damien et Marine utilisent l'angle droit de l'équerre pour prendre une mesure d'une partie de l'angle Â, puis font ensuite certaines mesures de longueurs à l'intérieur pour estimer le reste.
Leur procédure peut se schématiser par les deux premières figures, et se modéliser par la troisième figure :

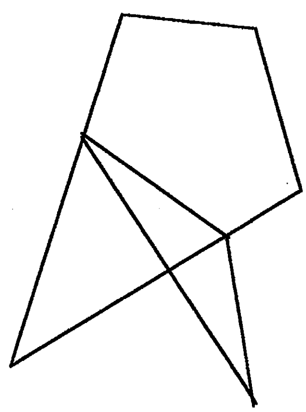


Comme pour le groupe orange lors de la première séance, « le modèle géométrique » est plus fort que l'environnement, puisqu'ils oublient la contrainte de ne pouvoir entrer sur le terrain pour résoudre.

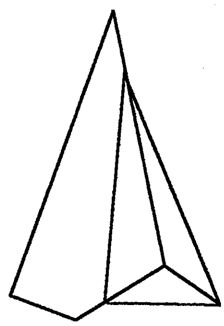
D'autre part, bien qu'ils entrent dans la recherche d'un moyen de construire rigoureusement les lignes par symétrie, ils restent dans une problématique pratique.
De retour en classe sur feuille de papier, ils tenteront durant vingt bonnes minutes de reprendre leur méthode, mais du fait qu'ils aient été trop pris par les contraintes spatiales (de mesures essentiellement), sans percevoir les invariants de leurs méthodes, ils abandonneront (et rendront compte d'une autre méthode sur papier).
Nous étudierons particulièrement leur démarche dans le chapitre 4C.

- David et David : l'intuition de la perpendicularité à l'axe

Dans la cour de récréation ils avaient l'angle Â aigu et tous les angles du triangle formé avec la tige, aigus également. Après qu'ils aient réalisé une construction par une symétrie à vue d'œil avec une bonne approximation, je leur demande de préciser les choix qui président à l'orientation des traits. Un David me précise qu'« il faut faire droit ». C'est une expression souvent utilisée par beaucoup d'élèves, et qui signifie pour eux « perpendiculaire » en ne précisant jamais par rapport à quoi. Ici, c'est par rapport à l'axe (ils ne le précisent pas), et je leur donne la permission d'entrer sur le terrain pour faire la construction comme ils l'entendent. Elle sera faite comme sur la figure ci-contre.



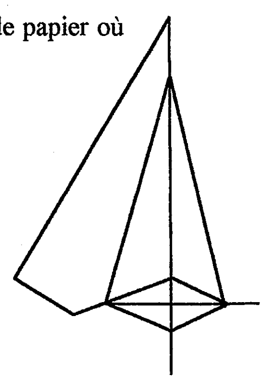
De retour en classe, le terrain fourni sur la feuille ne correspond plus à leur terrain dans la cour. L'angle Â est maintenant obtus sur le dessin. Leurs discours ne correspond plus à leur méthode, mais en reste imprégné, en étant très flou :
« On mesure la distance entre le trait et la tige = 3,9 cm »
(c'est a qu'ils mesurent et reportent)
« Avec l'accord de rentrer dans le quadrilatère nous traçons un trait pour que ça soit droit. »



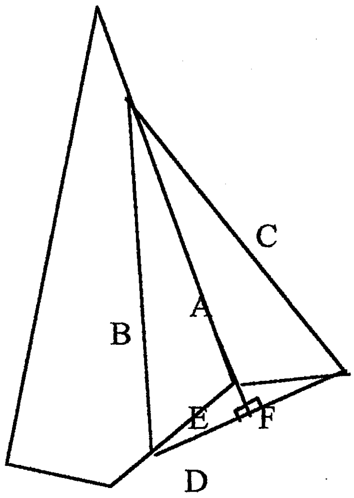
Dans la cour de récréation les élèves ont un meilleur repérage des relations d'incidence (ici la perpendicularité). « Faire droit » : on le repère dans la cour du fait de l'orientation générale des objets et des personnes ; on perd cette référence sur la feuille de papier où c'est l'orientation de la feuille qui fait référence.

- Arshe et Stéphane : le losange outil de perpendicularité et d'équidistance

Lors de la séance précédente Arshe avait déjà formulé sur papier la procédure représentée ci-contre. Lors de son explicitation au tableau, le



terrain n'étant plus positionné de la même façon, il n'avait pu refaire sa construction.
Il reprend dans la cour avec son camarade cette procédure, et tous deux effectuent des constructions au sol, en prenant bien leur temps pour contrôler et les angles droits et les reports de longueurs (la distance à l'axe).



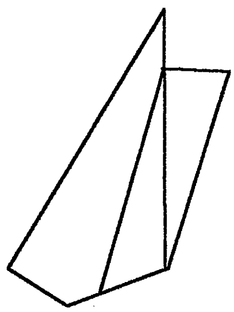
De retour en classe, sur la feuille de papier, ils expliqueront cette procédure par le dessin ci-contre et un texte (pas très clairs, mais soucieux d'être explicite) :
« Nous avons rallongé la tige A (point F). On trace un angle droit et on relie le point B au point F. C'est appelé point D, on mesure sa longueur. On mesure le point D (3,30 cm) puis on le rallonge. On relie le point E au point D et on trace un point C à partir de B. Relier A et D. »

Le passage dans la cour, après avoir eu l'idée, aura permis, il semble, une réelle prise en compte des constructions et de leur organisation en étapes, permettant aux deux élèves de préciser leur démarche sur feuille de papier.

b) Dans la cour, d'autres procédures

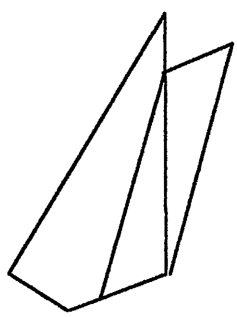
- La construction d'un rectangle

Les élèves ne contrôlent pas ici toutes les propriétés. Ou bien ils font attention aux angles droits, mais reportent les longueurs à vue d'œil, ou bien c'est l'inverse.
Cette remarque reste valable pour les constructions sur papier.



- Jérémy et Flory : le parallélogramme

Ils construisent un parallélogramme en prenant appui sur un côté du terrain (cette méthode a déjà été proposée par Jérémy lors des deux séances précédentes).
Mais ici, dans la cour de récréation, ils construisent la parallèle perpendiculairement au côté du terrain, à l'aide de l'équerre.



De retour en classe, sur leur feuille de compte rendu, il y a deux essais : un essai identique aux constructions de la cour de récréation et où visuellement on n'obtient pas un parallélogramme (la figure ci-dessus).
Et un autre essai où visuellement on a un parallélogramme (la figure ci-contre).

Ils écrivent :
« Je prends la mesure du bas de la tige (4 cm). Je reporte la mesure en haut de la tige et je trace le trait qui relie. »

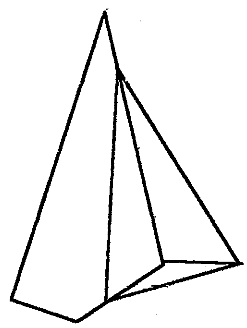
> Ici c'est la représentation sur feuille de papier qui permet de remettre en cause la construction à angle droit faite dans la cour de récréation. Le fait de disposer d'une feuille de papier dans la cour, et de représenter sur papier, dans la cour sa procédure, aurait peut-être permis aux élèves de contrôler plus directement cette erreur.

- Mélissa et Sandra : reproduction du triangle

Elles prennent les mesures des côtés a et b, et utilisent des baguettes pour former des objets ayant ces longueurs. Elles les positionnent à vue d'œil, avec une bonne approximation visuelle de l'angle.

Sur feuille de papier, de retour en classe elles construiront de même un triangle, et noteront : « J'ai mesuré la barre à côté de la tige, elle fait 7.5 cm après la barre en bas et je l'ai reportée en dessous ensuite j'ai tracé, la tige mesure 9.7 cm. » (Sur leur dessin, elle mesure en effet à peu près 10 cm.)

c) Sur papier, les procédures par symétrie

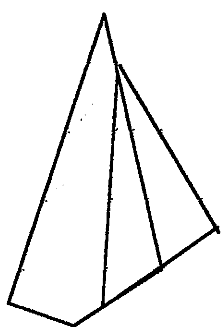


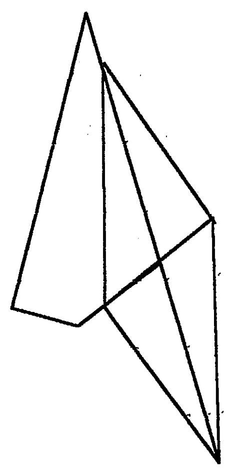
- Par une très bonne approximation visuelle

Malik et Frédéric, par exemple, précisent tout simplement :
« On a tracé un trait à côté de la tige et ensuite on a relié. »

- Le prolongement erroné

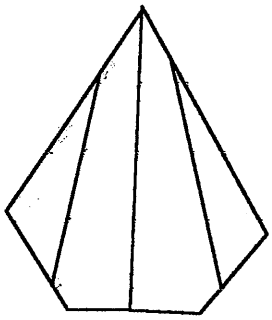
On retrouve cette construction sur papier. Mais, les élèves ici se rendent compte que cela ne fonctionne pas. Ils modifient généralement en poursuivant la construction pour aboutir à un parallélogramme. Ils ne sont pas conscients du changement de procédure, et dans les discussions mentionnent cette méthode comme étant bien de la symétrie axiale.

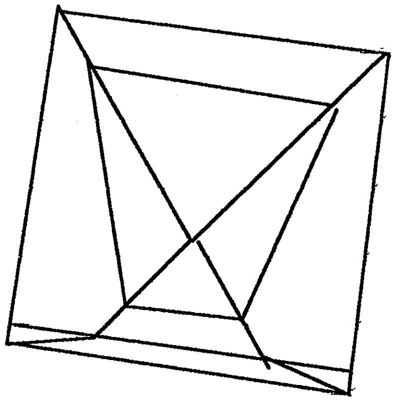




- Retour à des « images de symétrie »

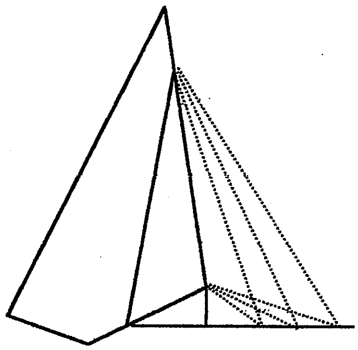
Pour deux groupes, deux productions différentes :





- La référence à l'horizontale et la verticale

Alissa et Yasmine

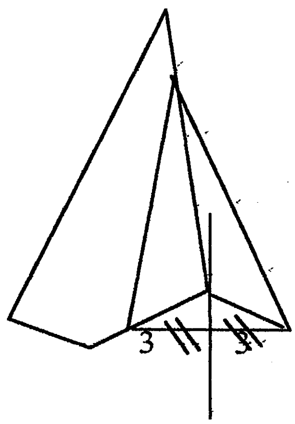


Elles tentent une symétrie avec référence à ces deux directions, dans un premier temps.

Elles constatent que cela ne fonctionne pas. Au brouillon les traits sont gommés, mais on peut constater qu'elles font coulisser le point choisi initialement sur l'horizontale.

Elles abandonneront cette méthode pour faire la construction à l'œil avec une assez juste approximation.

Mélissa et Sandra



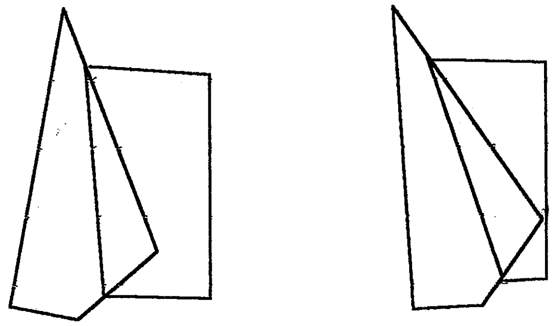
« Pour calculer une tige ? On a pris la longueur de la tige [a] qui fait 7,5 cm. Ensuite on a pris la longueur de la tige [b] qui fait 4 cm. Puis, on a reproduit la tige [a] et la tige [b] à côté. On a relié le bout de la tige [a] et de la tige [b]. Puis, donc ça nous a donné la longueur de la tige qui fait 10 cm. Voilà notre méthode. »

En fait, avant de rédiger, les élèves avaient trouvé 10,5 cm mais ont voulu pour la rédaction mettre « la bonne » mesure. Je leur ai demandé si malgré ce décalage elles pensent que leur méthode est correcte. Elles me répondent par l'affirmative.

> Il semble que les faibles intervalles d'écart de mesures sur feuille de papier, ne permettent pas aux élèves de remettre en question cette procédure erronée ; ou d'autres ; cette remarque étant plus générale.

d) Sur papier, référence à des parallélogrammes bien orientés

Deux élèves utilisent l'horizontalité et la verticalité pour effectuer leurs constructions, qui peuvent être reliées soit à la construction d'un rectangle, soit à la construction d'un parallélogramme.



Le second schéma est intéressant à étudier. L'élève se préoccupe plus de construire une partie rectangulaire, le rectangle du groupe orange peut-être, que de contrôler l'ensemble avec la tige.

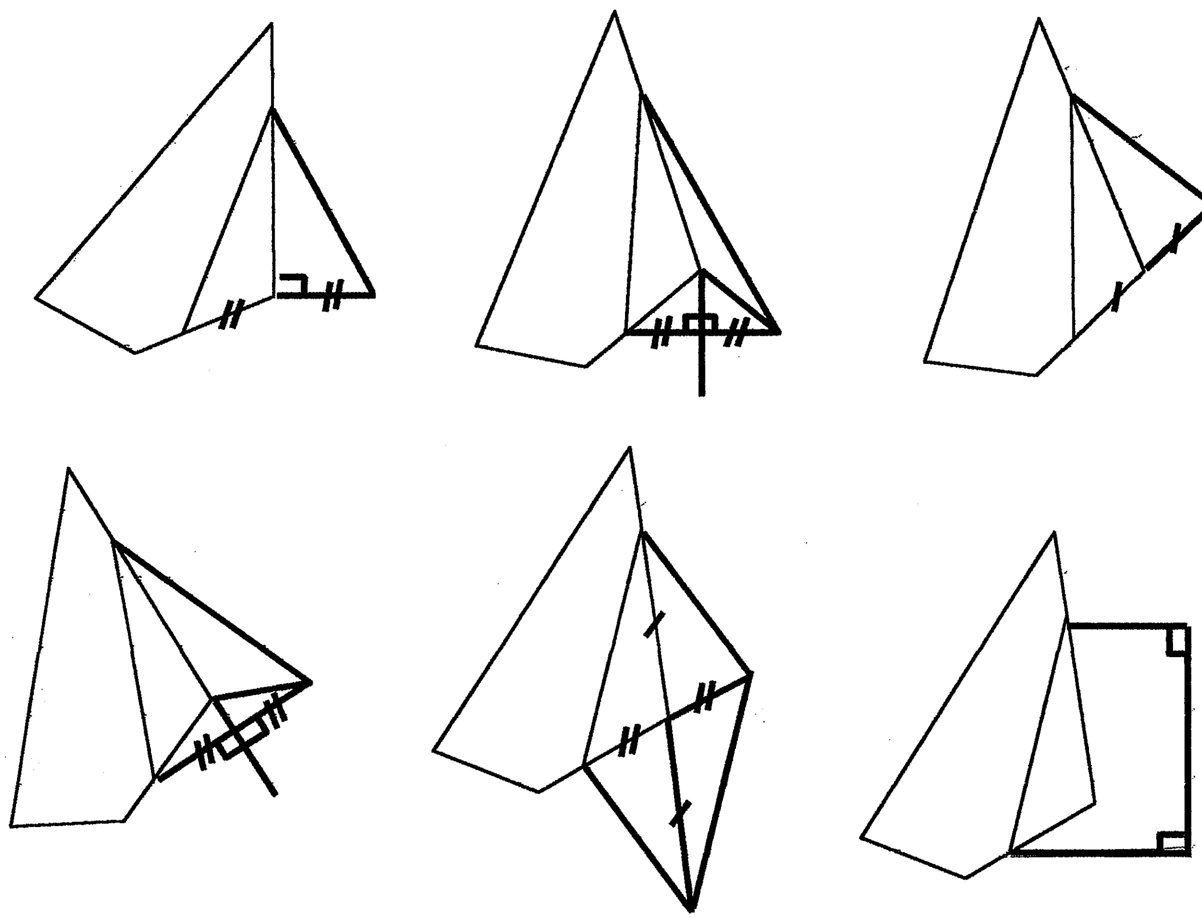
> Peut-être les élèves ont-ils mémorisé les procédures de construction d'un rectangle ou d'un parallélogramme, sans comprendre les propriétés sous-jacentes qui les justifiaient. Ceci nous renvoie à l'importance de la formulation des justifications des modèles utilisés dans les séances précédentes. Pourquoi construit-on un rectangle, ou un parallélogramme ? Leurs côtés opposés vont être de même longueur donc nous pourrons mesurer une longueur de la tige sur l'autre côté du parallélogramme … Finalement ce sont ces déclarations qui donnent du sens à l'usage des modèles, et en effet elles n'ont pas été suffisamment explicitées lors de ces séances.

N'ayant pas procédé à une synthèse lors des séances 3 et 4, volontairement du fait de la variété des propositions, et d'une incertitude sur leur traitement didactique, la dernière séance s'est envisagée comme la nécessaire synthèse avec apports de quelques réponses, et une présentation quelque peu ostensive de certaines notions.

V. Cinquième séance (mardi 20 juin 2000, 13h30)

La reprise des différentes procédures, et l'ébauche d'étude des aspects mathématiques sous-jacents s'est faite à partir des constructions proposées par les élèves à la séance précédente. Constructions correctes et erronées. Pour la clarté des dessins, j'ai reproduit quelques travaux sur feuille A3, et les ai présentés aux élèves au fur et à mesure, en leur demandant pour chacune de les commenter.

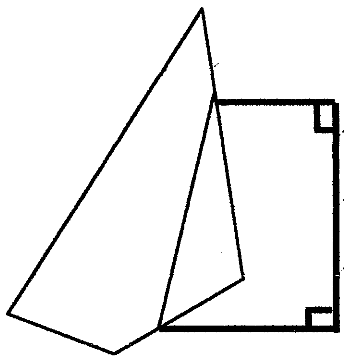
Voici quelques travaux choisis, sur lesquels nous avons réfléchi :



Des extraits de cette séance sont proposés en annexe 2.
Indiquons simplement que, dans cette séance, notre objectif était d'organiser un discours, le discours géométrique, autour des productions réalisées par les élèves. Formuler des propriétés géométriques pour argumenter sur des productions erronées, et des propriétés géométriques pour construire des dessins de géométrie.
Les élèves perçoivent bien en général les constructions qui ne conviennent pas, et peuvent en formuler des raisons. Leurs arguments portent alors sur des propriétés visuelles ou spatiales

des dessins, que je reformule souvent d'un point de vue géométrique, sur le mode de l'ostension essentiellement.
Concernant la symétrie axiale, nous retrouvons la persistance chez les élèves de la conception erronée de construction par prolongement d'un côté, et la prégnance de l'orientation verticale pour l'axe (cf. les deux premières figures de droite ci-dessus). D'autre part pour la référence au pliage, il n'est pas certain que « le mouvement dans sa tête » soit un mouvement conservant pour les élèves, en général cette référence ne vaut que si elle est effective.
Sur les quadrilatères les élèves ne mentionnent pas d'emblée des aspects géométriques, mais y font référence sur ma demande lorsque explicitement je leur demande d'adopter un point de vue géométrique. Cependant ils formulent rarement les propriétés, c'est donc moi qui les prend en charge.

Voici un extrait qui rend compte assez justement des éléments que nous mentionnons dans le cours résumé précédent, à la fois sur le point de vue des élèves et sur le procédé didactique utilisé :



Si par exemple on tourne complètement la feuille, on va bien voir que ce n'est pas un rectangle, par rapport au trait en bas.
Et puis même ...
Mais donnez moi un argument géométrique.
Le trait bas il est plus grand que là haut alors que dans un rectangle ...
Celui qui est parallèle à celui d'en haut il n'est pas de la même longueur.
Il y a une largeur qui n'est pas ...
Les largeurs ne sont pas égales. [...]
Ce trait là ici et ce trait là ici ne sont pas de même longueur, or dans un rectangle, on sait que les cotés qui sont opposés ont forcément la même longueur, donc ça ne peut pas être un rectangle. D'accord ça c'est un bon argument.

CHAPITRE 4C

ANALYSE DE TRAVAUX
ÉLÉMENTS DE RÉGULARITÉ DANS L'ÉTUDE DES INTERACTIONS DES ÉLÈVES AVEC LE MILIEU.

Après l'étude a priori et le compte rendu d'une partie du travail avec les élèves de la classe de CM2, réalisés dans les chapitres précédents, nous tenterons dans ce chapitre de dégager quelques éléments de réponse relatifs à notre question de recherche :

> Etudier les interactions des élèves avec le milieu de la situation « terrain et tige », dans le but d'établir des éléments à prendre en compte dans l'analyse d'une situation fondamentale de la géométrie comme modèle de l'espace.

A partir de l'étude des travaux, nous essayerons de repérer quelques éléments de régularité pouvant avoir un caractère général, pour être transférables à d'autres recherches, dans le cadre d'une analyse a priori ou a posteriori.

Le chapitre va s'organiser autour des questions dégagées une première fois dans le chapitre 1 paragraphe III. pour les situations de modélisation, puis reprises pour l'étude a priori de la situation « terrain et tige ».

1. Quelle est l'articulation des connaissances spontanément développées par les élèves dans leur rapport au milieu adidactique, et des connaissances géométriques sous-jacentes à une modélisation de la situation ?

Cette question sera abordée de façon détaillée dans un premier paragraphe, concernant l'étude des interactions au milieu d'élèves entrés dans une problématique de modélisation. Puis tout au long du chapitre à travers l'apport des éléments à d'autres questions.

2. Quelles sont les variables pertinentes qui modifient les interactions des élèves avec le milieu ? Et quelles sont les composantes du milieu objectif avec lesquelles l'élève interagit ?

Dans l'analyse a priori nous avions retenu deux variables fondamentales : la forme du terrain et l'articulation des environnements cour de récréation et feuille de papier. Le second paragraphe de ce chapitre sera consacré aux différentes influences de ces variables, pour tenter de cerner sur quelles interactions avec le milieu elles agissent.

3. Quel milieu construire pour permettre aux élèves d'entrer dans une problématique de modélisation ?

Cette question sera l'objet du dernier paragraphe. Nous y rappellerons les choix déterminants faits ou à faire, dans l'optique d'une reprise de la situation « terrain et tige » comme situation didactique et non plus comme « modalité » d'une situation fondamentale. Il sera donc à la fois un bilan de l'ensemble de l'expérimentation, et une ouverture vers un autre avenir de la situation « terrain et tige ».

Plan du chapitre

I. Éléments et types d'interactions dans les rapports au milieu d'élèves entrés dans une problématique de modélisation

Dans ce paragraphe, nous allons reprendre quelques travaux d'élèves, les commenter, les interpréter de façon à dégager quelques éléments qui pourraient être des éléments de régularité dans l'analyse de travaux en général.
Commençons par la reprise détaillée du travail du groupe orange : première séance, dans la cour de récréation, construction d'un rectangle dont la tige est un côté. C'est le premier groupe à faire appel à un modèle géométrique cohérent (le rectangle), à entrer dans une problématique de modélisation.

1. Etude du travail du groupe orange

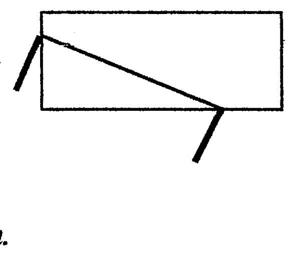
a) Le choix de la modélisation

Avant de reprendre en détail leur travail, rappelons ce qui caractérise la problématique de modélisation définie par S&B :

i) Problématique de modélisation, reprise de la définition

« [...] la solution d'un problème par modélisation est construite complètement dans le système symbolique du modèle selon la dynamique de ce système.
Cette démarche établit un certain rapport entre deux mondes : le monde sensible et un modèle, système symbolique doté de règles internes qui permettent de constituer à partir des objets initiaux et de relations initiales de nouveaux objets et de nouvelles relations valides. Un certain nombre de relations dans le modèle sont signifiantes de relations dans l'espace et leur permettent de représenter le problème dans l'espace par un problème dans le modèle. A partir de ces relations, et du système de règles de production internes au modèle, la solution est construite dans le modèle.
L'interprétation dans l'espace sensible de la solution construite dans le modèle permet la validation pragmatique de l'ensemble de la démarche. » (p50)

Les élèves du groupe orange positionnent en premier lieu deux baguettes à angle droit avec la tige de sorte à obtenir visuellement un rectangle. L'égalité des longueurs des baguettes, associée à la perpendicularité approximative à la tige, permet en effet cette vision.



Ils font donc appel à une figure géométrique, comme modèle de résolution.

La connaissance de l'égalité des longueurs des côtés opposés entre en jeu comme « théorème en acte », de façon explicite mais non formulée par les élèves.
Ils font intervenir un modèle : la figure géométrique « le rectangle », muni d'une propriété qui justifie la pertinence du modèle (sa validité interne).

Ils auraient pu mesurer la distance entre les deux extrémités des baguettes, *sans* matérialiser le quatrième côté.
Ils ne l'ont pas fait. Pourquoi ?
La question peut se poser, puisque nous avons constaté que les élèves en général contrôlent les prolongements à vue, et les angles également. Pourquoi ici le contrôle visuel des angles droits construits empiriquement ne leur suffit pas, et pourquoi vont-ils entrer dans la construction spatiale effective du rectangle ?

Est-ce l'habitude de construire avec des instruments sur le papier, des figures de géométrie ?
Est-ce le fait qu'il existe un instrument spécifique à la construction de l'angle droit ?
Est-ce parce qu'il faudrait utiliser les instruments présents dans la malle ?
Parce qu'ils voulaient faire plaisir à la maîtresse ?
Parce qu'ils pensent que c'est dans une construction avec instruments que s'effectue la géométrie ? ....
Nous ne pouvons guère le savoir.
Mais de fait, ils ont choisi d'entrer dans une problématique de modélisation.

ii) Un implicite du contrat didactique

L'entrée dans la problématique de modélisation c'est :

> Faire référence à un modèle et en réaliser une construction spatiale qui permet d'obtenir le résultat.

Dans ce cas l'enjeu est la mise en relation du spatial et du géométrique, la confrontation du modèle à la réalité spatiale. La construction nécessite (a priori) de mettre en œuvre (implicitement ou explicitement) des propriétés géométriques du modèle, et de se confronter aux instruments (représentations matérielles d'objets géométriques). Le contrôle discursif du modèle ne suffit pas pour la résolution, le contrôle spatial est également requis.

Les données spatiales, de l'environnement et du milieu matériel associé, fournissaient aux élèves **des indices d'un contrat d'entrée dans une problématique de modélisation**.
C'est en cela que nous parlerons d'**un implicite du contrat didactique**.

Reprenons maintenant le déroulement de la démarche du groupe orange, pour tenter de cerner ce que les élèves développent comme connaissances, spatiales ou géométriques, les rapports qu'ils entretiennent à ces connaissances et aux autres éléments de la situation.

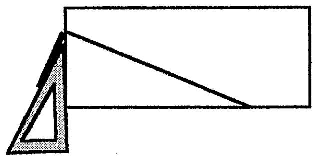
b) Mise en œuvre spatiale effective d'un modèle

i) Construction des angles droits du rectangle : perte et retour du modèle

- Première construction d'un angle droit à la tige

Dans la première approche de la construction, l'angle droit est pensé par les élèves, comme l'angle droit formé par la tige et un des côtés à construire.
L'angle droit (objet géométrique et objet spatial) est en relation avec le modèle de résolution utilisé par les élèves, ce qui ne sera plus le cas par la suite, c'est pourquoi nous le précisons dès maintenant.

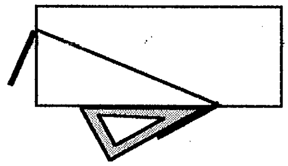
L'angle droit est associé à l'utilisation de l'équerre. Or ce n'est pas l'angle droit de l'équerre que les élèves utilisent, mais son angle de 30°. De fait, l'angle de 30° offre une construction acceptable d'un angle droit avec la tige, puisque celle-ci forme un angle à peu près de 60° avec le côté du terrain.



La question des cas particuliers sera reprise dans le III. de ce chapitre. Indiquons dès maintenant, que le choix laissé au hasard de ces relations angulaires entre tige et terrain, ne nous parait pas être une erreur d'étude a priori, mais doit être accepté comme intrinsèque à toute situation spatiale.

Les élèves entament donc à l'aide de l'angle de 30° de l'équerre, une réalisation *pratique* d'une représentation d'un objet géométrique (l'angle droit). Pratique au sens de « contrôler ses rapports spatiaux de manière empirique et contingente »[1].
Ils ne cherchent pas à savoir si c'est général, si l'outil est adapté, ... Ils veulent obtenir un angle droit, dont la tige serait un côté, eh bien voilà « un coin » de l'équerre qui fournit une réalisation effective de cet angle droit.

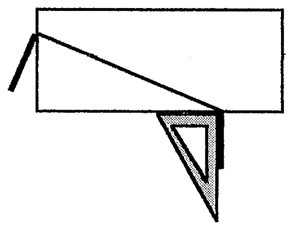
[1] S&B, une des caractéristiques de la problématique pratique.



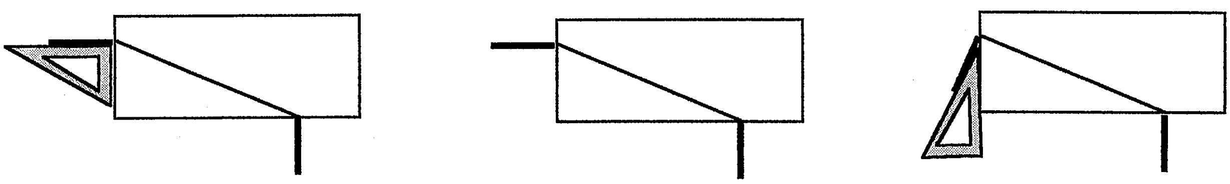
A l'autre extrémité de la tige, pour construire l'angle droit, les élèves utilisent à nouveau l'angle de 30° de l'équerre. Puisqu'il fournissait l'angle droit préalablement, il peut fournir un angle droit aussi à cet endroit.
« Mais là ça ne fait pas un rectangle ! »
Alors problème.

C'est à ce moment que va s'opérer un changement dans le rapport à l'objet « angle droit » et la relation qu'il entretient avec le modèle. Les élèves vont perdre la référence au rectangle à construire, à partir de la tige, pour ne se préoccuper que de la construction d'un angle droit.

- Changement de référence, perte du modèle



La recherche ne va plus porter sur faire un angle droit avec la tige, en référence à la volonté de construire un rectangle, mais construire un angle droit tout court. Or *l'angle droit tout court, c'est l'instrument qui le représente, l'angle droit de l'équerre.*
Il s'opère comme un glissement, une perte des objets de référence du problème.
Les objets qui vont alors intervenir, sont l'équerre et son angle droit, et l'objet éminemment présent du problème, le terrain, dont les côtés sont les seules lignes accessibles. Ils construisent un angle droit à partir d'un côté du terrain.
Comme l'angle formé par ce coté et la tige est moindre, les élèves acceptent visuellement cette construction pour leur modèle rectangle (en ayant finalement oublié les références de l'angle droit par rapport à la tige). Ils en sont effectivement satisfaits puisqu'ils retournent à l'autre extrémité en pensant avoir mal positionné leur équerre.
Mais à cet endroit, la donnée spatiale angulaire, entre tige et terrain, est telle que la construction ne les satisfait pas et qu'ils en reviennent à leur première construction.



Le maître est là au moment où ils manipulent l'équerre, il demande « vous êtes sûrs que c'est comme ça qu'on fait pour construire un angle droit ? ». Les élèves retournent l'équerre, la font pivoter … puis finalement la positionnent comme précédemment. Le maître s'en va.

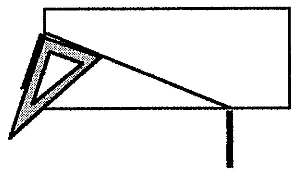
On ne peut savoir si cette remarque a opéré un changement chez les élèves. Le fait est : quelques minutes après ils positionnent l'équerre à l'intérieur du terrain pour construire l'angle droit par rapport à la tige *avec* l'angle droit de l'équerre.

- Retour du modèle

Ici second changement dans le rapport aux modèles (rectangle et angle droit).
La référence au rectangle, réapparaît ; de nouveau le rectangle à construire est présent avec la tige qui en définit un de ses côtés. Les objets du modèle réapparaissent. Peut-être le « c'est comme ça qu'on fait pour construire un angle droit ? » a-t-il fait retour des références de cette construction. Ou bien est-ce autre chose on ne saurait le dire.

ii) La transgression de la règle

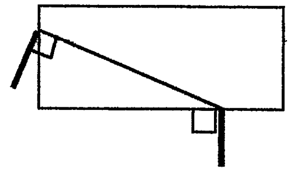
Le fait est qu'à nouveau la tige est présente dans leur esprit, et les élèves y placent l'angle droit de l'équerre contre. **C'est par une transgression de la contrainte qu'ils opèrent ce retour au modèle**. Ils construisent l'angle droit directement en entrant sur le terrain.



Interprétation sur l'acceptation par les élèves de cette rupture de contrainte :
Les élèves ont récupéré leur modèle, et sont dans la volonté de le construire spatialement.
Ils mettent en relation *directe et sans détour* l'objet géométrique et l'objet spatial associé, à l'aide de l'instrument adapté.
Cette volonté de mise en relation est *plus forte* que l'entorse à la contrainte du problème.
De fait nous l'avions signalé, l'ensemble des autres élèves ne soulèvera pas cet aspect lors de la mise en commun, comme cloués sur place par **« l'apparition » d'un modèle géométrique et de sa réalisation effective** par leurs camarades.

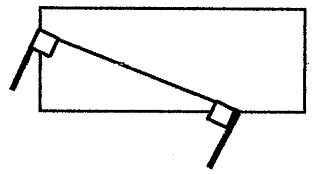
> Les élèves ont transformé le problème en un autre problème spatial plus directement lié au modèle utilisé : « comment construire un rectangle dont un côté est donné », oubliant les contraintes du problème initial. Nous discuterons en III. du rôle du maître dans la gestion de cette entorse à la règle du jeu.

- L'impact du modèle



Les élèves ont donc une baguette placée à angle droit avec la tige à l'une de ses extrémités, et une baguette placée à angle droit avec un côté du terrain à l'autre extrémité.
« Et là-bas, ce n'est pas le même angle droit », l'élève désigne cette seconde position.
Ils y repartent avec l'équerre. Un élève la place comme avant, à angle droit avec le terrain. « Ben si c'est un angle droit ! ». Un autre élève insiste pour lui signaler que « ce n'est pas le même angle que celui construit là-bas ».

L'impact du modèle ne s'opère pas pour ces deux élèves au même moment. Leur manque d'explicitation des références de l'angle les empêche de se comprendre. L'un est dans le repérage de l'angle droit, par rapport à l'objet du problème : la tige. L'autre est dans le repérage de l'angle droit par rapport à l'angle droit lui-même en soi.



C'est après quelques manipulations que s'opère le changement et la reprise du modèle référence pour celui qui manipule, pour positionner la baguette à angle droit avec la tige. « Ben, ça y est, là ça fait bien un rectangle. »
En ayant à nouveau transgressé la règle.

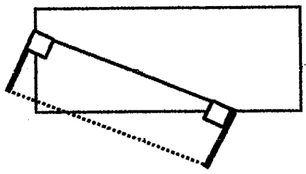
iii) Une propriété : présente pour le modèle, absente pour sa réalisation spatiale

L'égalité des longueurs des côtés construits avec les baguettes est prise en charge entièrement par ces objets du milieu matériel, puisque les baguettes sont de même longueur.
Les explications fournies par le groupe orange lors du moment d'argumentation en fin de séance (exposé dans le paragraphe suivant), laissent penser que les élèves n'ont pas tenu compte de cette propriété pour la construction. Le fait que les objets eux-mêmes *supportent* la propriété, ne permet pas ici une bonne appréhension de cette propriété géométrique du rectangle.

Or, étrangement, cette propriété du rectangle fait partie du modèle : en construisant un rectangle, le côté opposé à la tige aura même longueur que la tige. Les élèves ont bien une appréhension intuitive de cette propriété puisque c'est elle qui justifie le recours au modèle qu'ils ont choisi.
Pourtant dans la réalisation pratique du rectangle, les élèves n'y feront pas référence.

Cette variable longueur des baguettes à disposition nous paraît être importante, pour l'établissement d'un rapport direct entre les élèves et cette propriété. Malgré son caractère local, dans cette procédure de construction d'un rectangle, elle se rattache à un aspect beaucoup plus important lié à la possibilité d'un rapport plus géométrique aux constructions.

iv) Des hasards prégnants



La ligne qu'ils construisent avec le décamètre, passe juste un peu à l'intérieur du terrain. Ils n'ont pas l'utilité ici de transgresser la règle, du fait qu'en poussant *un peu* le ruban du décamètre, la ligne passe au sommet du terrain.
Ce **hasard pris comme une nécessité** par les élèves, semble-t-il, est la marque du caractère intuitif qui guide leur démarche, ou expérimental non défini par un but. En effet, le modèle « rectangle » n'est pas suffisamment construit comme modèle de résolution pour que les élèves se dégagent des indices spatiaux non pertinents.

Dans la suite de l'étude de la démarche du groupe orange, regardons maintenant le rapport des élèves aux propriétés géométriques formulées lors du moment d'argumentation.

c) Moment d'argumentation : ambiguïté de la problématique géométrique

Rappelons la tâche du dernier moment de la séance : « Maintenant que chaque groupe a exposé sa méthode, y a-t-il un groupe parmi vous qui peut être sûr et certain que sa méthode est correcte et pourrait nous le prouver ? »

Le groupe orange argumente en disant qu'ils ont « construit deux angles droits, donc avec les baguettes ça fait un rectangle ». Un élève hors du groupe signale qu'ils n'ont pas vérifié si les longueurs des baguettes étaient les mêmes. Un élève du groupe répond qu'ils ont utilisé des baguettes identiques. Je précise « baguettes identiques donc *de même longueur* ».

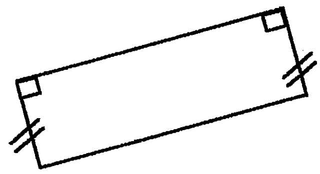
Remarquons que **les élèves argumentent sur la validité de la construction, et non pas sur la validité du modèle**. La question ne renforçait pas un choix plutôt qu'un autre. Le mot « méthode » utilisé dans la consigne peut renvoyer au modèle, et peut renvoyer également à sa réalisation, la construction effective.

Fonction du maître : il a la responsabilité de faire la distinction auprès des élèves entre les deux références d'argumentation, pour l'énonciation des propriétés géométriques.

Cela participe à un éclaircissement auprès des élèves, des différents aspects géométriques internes à la pratique de modélisation.

Regard sur l'argumentation pour la construction du rectangle

Les élèves du groupe orange ont placé deux baguettes de même longueur à angle droit avec la tige, et relié ensuite leurs extrémités, *donc* ils ont construit un rectangle.



Les élèves étaient tous convaincus que ce procédé aboutissait en effet à produire un rectangle.
La propriété géométrique permettant de justifier cette construction, pourrait se formuler de la façon suivante : un quadrilatère convexe, dont deux côtés sont de même longueur et perpendiculaires à un premier côté, est un rectangle.
Propriété géométrique ? Nous ne trouvons pas cette propriété dans le corpus des connaissances de géométrie enseignées.
Elle peut être envisagée comme conséquence de plusieurs propriétés « parallélisme de droites perpendiculaires à une même droite » ; « un quadrilatère convexe, avec deux côtés opposés parallèles et de même longueur, est un parallélogramme » ; « un parallélogramme avec un angle droit est un rectangle ». Celles-ci sont enseignées, avec une restriction parfois pour la seconde, dans la mesure où elle nécessite de *regarder le dessin* pour s'assurer de la convexité. Mais quel détour pour arriver à la formulation de la propriété qui nous intéresse ici !

Aidons-nous d'une même constatation dans les recherches de S&B, lorsqu'ils étudient les différences entre connaissances spatiales et connaissances géométriques :

> « Quelles connaissances sont nécessaires au vitrier pour reproduire un quadrilatère de forme parallélogramme afin de découper une vitre adaptée à la fenêtre d'un de ces clients ? »
> Ils citent une propriété utile pour la résolution puis ajoutent :
> « Mais il ne trouvera pas cette propriété dans un cours de géométrie, car pour la géométrie elle n'a pas particulièrement d'intérêt. Les propriétés intéressantes pour la géométrie et pour l'espace ne sont pas les mêmes » (p13)

De même ici, cette propriété ne figure pas dans un cours de géométrie, et pourtant c'est celle qui est utile, ou pour prévoir ou pour argumenter.

Question posée au maître : quelle position adopte-t-il par rapport à cette connaissance ? La considère-t-il comme une propriété géométrique ? Laisse-t-il sa compréhension à l'intuition ? Est-elle susceptible d'institutionnalisation ? …

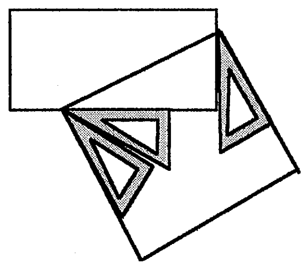
2. Problématique pratique pour la réalisation d'un modèle géométrique

Nous allons reprendre à partir de l'étude de deux exemples, un aspect entrevu au cours du paragraphe précédent : l'entrée dans une problématique pratique, caractérisée par un « contrôle de ses actions de manière empirique et contingente » pour la construction spatiale d'un objet géométrique.

a) Deux exemples

i) Hank et l'angle droit

Il s'agit de la construction d'un rectangle dont la tige est un côté, par Hank, lors de la seconde séance sur papier.



La tige est positionnée dans le rectangle de sorte que les angles avec les côtés du terrain ne sont pas très éloignés de 30° et 60°, mais c'est une position choisie au hasard.
Hank construit les angles droits en utilisant l'angle de 30° de l'équerre. comme sur la figure ci-contre (et comme le groupe orange en début de recherche). Il perçoit la complémentarité, puisqu'il place deux angles à 30°, mais les connaissances en jeu lui manquent.

L'angle droit est donc présent avec ses références dans l'esprit de l'élève, comme figure géométrique, et il en entreprend une construction spatiale « rigoureuse ».
Le report de deux fois l'angle de 30° à une des extrémités de la tige, est un signe d'une volonté de construire spatialement *rigoureusement* l'angle droit avec l'aide des instruments.
Etudions un second exemple pour préciser cette idée de rigueur.

ii) Jérémy et le parallélogramme

Pour construire le côté opposé au côté a du triangle, sur papier en troisième séance, Jérémy reporte avec le compas (en construisant des arcs de cercles), la longueur a, en pointant le compas à l'extrémité de la tige ; et il reporte la longueur du trait marqué en gras sur la figure ci-contre, en pointant le compas à l'extrémité du côté du terrain (le sommet en haut de la figure). L'intersection des arcs de cercles lui fournit le quatrième sommet du parallélogramme qu'il relie aux autres sommets.

Dans sa démarche, Jérémy a le souci d'effectuer une construction *rigoureuse*, non soumise au contrôle visuel, tout comme nous l'avons remarqué pour Hank.
L'usage du compas pour reporter les longueurs, la construction d'un point par intersection de deux arcs de cercles, sont des indices d'une construction géométrique, « comme on en fait à l'école », pour construire des figures particulières (carré, losange, triangles équilatéraux et isocèles, plus tard parallélogramme). Il nous semble en effet que c'est un contrat en géométrie qui fait qu'une construction juste se fait avec des instruments. Là encore il manque à l'élève la connaissance sur le parallélogramme.

D'autre part, tout comme Hank, Jérémy prend appui sur des indices spatiaux liés à la particularité de la configuration, tels une partie de la longueur du côté du terrain, et un de ses sommets, pour effectuer sa construction.

b) Paradoxe de la modélisation : appui rigoureux sur des indices de particularité

Nous pourrions caractériser l'attitude de Hank et de Jérémy, par la **volonté d'une construction spatiale *rigoureuse* avec référence à un modèle géométrique.**

« Rigoureuse » pour dire trois choses :

- l'utilisation d'outils liés de par leur fonction à des objets géométriques
- la présence d'une organisation de la construction en étapes
- le souci de la cohérence du résultat obtenu avec le modèle initial.

Leur démarche peut se découper suivant quatre points :

- le modèle géométrique est présent,
- la recherche d'une construction rigoureuse au sens défini ci-dessus,
- la prise d'indices spatiaux qui permettent de par leur particularité une construction spatiale efficace,
- mais non reproductible.

> Quels moyens ont les élèves de distinguer le particulier du général, de contrôler les propriétés qu'ils mettent en jeu dans leurs constructions, voire même d'expliciter ces propriétés ?
> Se pose ici une question fondamentale, déjà entrevue précédemment mais non encore soulevée, celle d'un manque dans les connaissances géométriques des

élèves par rapport aux procédures qu'ils imaginent, pour leur permettre de contrôler leurs actions sur le milieu.

L'exemple de Jérémy nous permet également de parler d'un autre phénomène non décrit jusqu'à maintenant mais déjà observé dans des recherches, et observé dans celle-ci à différents moments des travaux : la perception syncrétique des objets.

c) La perception syncrétique des objets

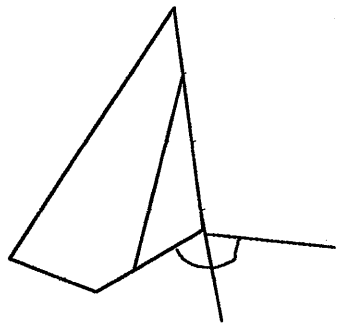
Lorsque Jérémy construit le côté opposé au côté a du triangle, il construit « un trait » qui à la fois a même longueur que le côté a et à la fois lui est parallèle. Il ne sépare pas ces deux propriétés, mais construit un tout. Un tout qui fait bloc (même si par ailleurs il prend deux informations, deux longueurs, pour construire un point).

Lorsque Jérémy a présenté sa démarche à l'ensemble de la classe, le dessin au tableau ne présentant pas les mêmes indices spatiaux que sur sa feuille, le trait construit ne donnait pas à voir un parallélogramme. J'ai alors moi-même signalé la séparation qu'il y avait à faire entre le parallélisme de ce trait et son égalité de longueur avec le côté a.
J'ai demandé aux élèves s'ils savaient comment on trace une parallèle à une droite, et fort justement ils connaissaient une technique : faire coulisser une équerre le long d'une règle. Il est vrai que cette procédure ici est inadaptée. Mais il semble que le parallélisme, dans la procédure de Jérémy, et dans l'esprit des élèves, n'était pas distinct de la longueur à reporter.

Nous avons repéré ce même phénomène lors de la deuxième séance pour les reproductions du triangle par symétrie par rapport à un des côtés du terrain. Dans la reproduction d'un segment, les élèves ne dissocient pas le prolongement (la construction d'une droite) du report d'une longueur sur celle-ci.

D'une manière générale, **lorsque les élèves construisent un trait, ils prennent en compte globalement la longueur et la direction du trait**. Nous n'avons jamais observé de construction séparée, de lignes pour construire une direction, et d'un report de longueur sur ces lignes.

Lors de la cinquième séance, j'ai montré aux élèves une procédure par symétrie axiale en utilisant le report d'angle. J'ai bien sûr séparé la construction de la ligne symétrique du côté a, du report de la longueur a sur cette ligne. Une exclamation des élèves me paraît significative à rendre compte ici :



« Je construis un gabarit de l'angle, je reporte l'angle pour construire la ligne symétrique, je trace cette ligne. »
« Mais tu as oublié la longueur ! »
« Ce n'est pas que je l'ai oubliée, je ne m'en suis pas encore occupée. Maintenant que j'ai construit cette ligne, je vais en effet reporter la longueur, à l'aide de mon compas. »

Ces différents exemples nous amènent à faire une hypothèse concernant le rapport des élèves aux « objets » : **La construction, sans séparer leur direction de leur longueur, caractérise une attitude de rapport pratique aux objets ; les distinguer caractériserait une attitude géométrique[2].**

Ceci permet alors de mieux comprendre quelques procédures d'élèves, et la non prise en compte de certaines notions. En particulier dans la reproduction du triangle à l'identique, les élèves contrôlent l'angle formé par les côtés à vue, et ne considèrent que les longueurs des deux côtés, et ceci que ce soit dans la cour de récréation ou sur la feuille de papier. Ceci paraît maintenant compréhensible si en effet les directions sont intégrées implicitement aux reports de longueurs[3].

3. Une première conclusion

Les points essentiels que nous retiendrons de cette étude des travaux des élèves, qui nous paraissent être des points généraux, réguliers, et donc transférables dans l'analyse d'autres situations de modélisation sont les suivants :

- La mise en œuvre de connaissances de géométrie par les élèves, plus ou moins stables, leur permettant d'agir sur le milieu.

- Paradoxalement, un manque de clarté et d'explicitation des propriétés géométriques sous-jacentes à ces connaissances, ne permettant pas aux élèves de contrôler de manière efficace ces mêmes actions sur le milieu.

---

[2] Ceci pour l'école élémentaire au moins, car la notion de vecteur par exemple prend en charge à la fois la direction et la longueur.

[3] Nous retrouvons également une difficulté soulevée par S&B dans l'apprentissage de la notion d'angle : la conception erronée rattachant cette notion à la notion de longueur (intervenant dans les dessins des segments, représentant les demi-droites définissant un angle). Voir à ce propos l'article paru dans la revue Grand N, n°56, *Un processus d'enseignement des angles au cycle III.*

- Une prise en compte des indices de particularités des objets du milieu, pouvant ou bien être source d'un ancrage trop fort dans un problématique pratique, ou bien au contraire être source de mise en œuvre de connaissances géométriques.

Pour ce troisième point, nous pensons explicitement aux travaux utilisant les angles de l'équerre autres que l'angle droit, dans les cas où la tige présentait visuellement des angles de 30 et 60 degrés avec les côtés du terrain. L'usage implicite par les élèves de la complémentarité, est bien en liaison avec des connaissances géométriques (sommes des angles), et provoquée par la particularité de la position de la tige.

Poursuivons l'étude en considérant maintenant l'influence des variables fondamentales de la situation dans le rapport des élèves avec le milieu.

II. Influences des variables pertinentes de la situation

Dans l'étude a priori de la situation « terrain et tige » nous avions dégagé deux variables pour l'évolution des interactions du sujet avec le milieu objectif de la situation de référence : la forme du terrain, et l'articulation des environnements papier crayon et cour de récréation.

La forme du terrain, rectangulaire dans un premier temps, permettait :
- une première appréhension du problème dans un cadre assez proche des configurations habituelles rencontrées par les élèves,
- et la connexion dans les procédures des élèves avec des connaissances géométriques abordables en fin de cycle 3.

Le changement de forme du terrain, en quadrilatère quelconque, permettait la mise en évidence de propriétés géométriques sous-jacentes à certaines constructions, non apparentes pour ces mêmes procédures sur terrain rectangulaire.

L'articulation des environnements cour de récréation et papier crayon permettait :
- l'entrée dans des procédures géométriques ; un nouveau regard dans l'environnement papier crayon des procédures spatiales mises en œuvre dans la cour de récréation ;
- l'entrée dans un processus de modélisation, comme attitude d'anticipation pour contrôler une situation spatiale ;
- la mise en évidence des différences de rapports des élèves avec le milieu.

Nous étudierons préalablement, dans cet ordre, l'influence de ces variables sur la dévolution du problème, leur influence sur le rapport à la modélisation et aux connaissances géométriques sous-jacentes, et leur influence sur l'appréhension des figures de géométrie.

1. La dévolution du problème

> « Définition : la dévolution est l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage (adidactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert. »[4]
>
> « La dévolution permet l'entrée du sujet (didactique et personnel) dans le jeu.

---

[4] G. Brousseau (1988) p325.

> Question : comment l'enseignant peut-il obtenir cette entrée, supposée dépendre essentiellement des motivations de la personne élève par la manipulation du milieu didactique ? »[5]

Dans le processus de dévolution entrent en effet des facteurs que nous ne maîtrisons pas (le psychologique, l'affectif, ...) mais du point de vue de la didactique quelques éléments relatifs à la situation elle-même peuvent être avancés :

- **La crédibilité spatiale,**

créée par l'environnement cour de récréation, lors de la première séance.

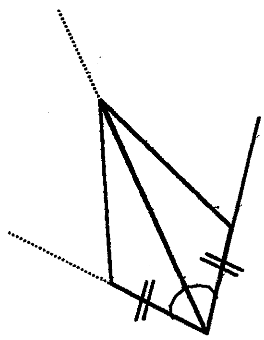
Un réel problème, une énigme, auquel les élèves sont confrontés.
Le « réel » problème est un aspect subjectif. Il repose dans le cas de l'expérimentation, sur l'accord de la part des élèves, d'imaginer l'impossibilité d'entrer sur le terrain. Cet effort a été accepté par les élèves. Lors de la première séance, et lors des séances suivantes.

> Qu'en serait-il dans une autre classe ? La crédibilité spatiale est un facteur subjectif. Au maître de créer cette condition suivant les nécessités imposées par les élèves.

- **Le maintien des contraintes initiales du problème,**

dans les deux environnements cour et papier.

Lors de la cinquième séance, j'ai montré au tableau la méthode utilisant un gabarit de l'angle Â, en le prenant directement en entrant dans le terrain. J'avais spécifié ce point contrevenant à la contrainte du problème, cependant un élève m'a bien fait remarquer, « ben oui mais si tu rentres dans le terrain, alors c'est plus la peine de s'embêter, on peut mesurer directement ! ». La rupture de contrat que j'imposais ici n'a pas du tout été acceptée par les élèves, et ma justification en terme d'étude d'une procédure géométrique n'était pas licite[6].



[5] Ibidem p323.

[6] Nous revenons sur ce point important dans le III.

Nous faisons l'hypothèse que c'est également le maintien du contrat initial[7], lié à la crédibilité spatiale de la situation, au cours des différentes séances, qui a permis une bonne dévolution du problème.

- **Le passage de la recherche d'un résultat, à la recherche de méthodes pour obtenir ce résultat.**

Lors de la première séance, il était clair que les élèves cherchaient à obtenir une mesure de la longueur de la tige. C'est le premier contact avec le problème, la première phase d'appropriation des données, et de l'enjeu.
Un bref instant lors de la première séance, j'ai failli donner la possibilité à un groupe d'entrer sur le terrain pour mesurer directement la longueur de la tige et comparer cette mesure à celle qu'ils avaient obtenue. Or il m'est apparu rapidement, que cette possibilité allait rendre caduque la recherche des autres groupes. Car bien évidemment, le résultat de cette mesure directe allait se propager dans les autres groupes, et du fait de l'enjeu portant sur cette mesure, il n'y aurait plus d'intérêt à la chercher (toutes les tiges avaient la même longueur).
Il était donc nécessaire, nous semble-t-il a posteriori, de maintenir *un suspens* suffisamment long, pour que les élèves poursuivent leur recherche[8].
Sans valider, chaque groupe a présenté sa méthode, et ce n'est qu'après la présentation du dernier groupe que la validation s'est faite par une mesure directe en entrant sur le terrain.
Ce dernier groupe (hasard provoqué) était le groupe orange, seul à avoir produit une méthode susceptible de se justifier géométriquement. La juxtaposition de l'annonce de leur mesure (4m06) et de la mesure obtenue par comparaison directe (4m) a crée **un phénomène d'étonnement**, qui n'est pas sans lien avec la prise en charge ultérieure par les élèves de la recherche de méthodes.

---

[7] Sans cette contrainte il n'y a plus de problème. Or nous avons pu repérer que certains groupes la mettent de côté pour effectuer certaines constructions. Le groupe orange par exemple pour la construction d'un rectangle, ou Damien et Marine pour reproduire l'angle Â par symétrie. Ce qui peut être intéressant, c'est alors de se servir de ces démarches pour faire une autre dévolution aux élèves, celle de la recherche d'un modèle géométrique et de son adaptation aux contraintes spatiales du problème. N'est-ce pas la dévolution de la problématique de modélisation ? Elle n'est alors possible que si la première dévolution, celle du problème lui-même a été bien faite.

[8] On pourrait aussi envisager des longueurs de tiges différentes pour chacun des groupes, et permettre alors la validation directe après justification des méthodes utilisées. C'est ce que nous choisissons en formation initiale ou continue. Mais pour l'école, la gestion du groupe et de la séance nous parait plus efficace avec la première contrainte.

Ce nouvel enjeu sera formulé pour les élèves à la deuxième séance. Ils accepteront de le prendre en charge, dans l'environnement papier, dans la mesure où *il se justifiait* par l'annonce d'une séance ultérieure de retour dans la cour pour tester ces différentes méthodes.

Le changement de tâche, le passage de la recherche d'un résultat à la recherche de méthodes pour obtenir ce résultat, a permis de considérer

- **l'environnement papier, comme un « laboratoire de recherche », pour prévoir, anticiper des méthodes à mettre en place dans l'environnement cour de récréation.**

Nous retrouvons là un aspect important de la justification des modèles mathématiques : la prévision, l'anticipation ; et le lien entretenu entre géométrie et usage de figures de géométrie.

> Cet aspect fondamental dans la constitution des modèles mathématiques n'a pas suffisamment été utilisé par moi-même lors de la seconde et troisième séance. Nous supposons que son accentuation permettrait : de justifier une demande de formulation plus explicite des procédures ; un dégagement de la part des élèves des indices spatiaux relatifs à une configuration pour une prise en compte plus grande des invariants d'une procédure.

En liaison avec le point précédent, un autre aspect est impliqué dans le processus de dévolution :

- **Le caractère d'expérimentation**.

Faire des hypothèses et les tester ensuite, mettre en place un dispositif qui permette de valider ou non une hypothèse, relève d'une démarche expérimentale utilisée en sciences, et valorisée dans les pratiques de classes de l'école primaire. De fait, les élèves *s'engagent* (avec plaisir) dans un processus expérimental, selon la situation et le milieu constitué bien évidemment. Il semble qu'ici cela ait également favorisé le processus de dévolution.

Le caractère d'expérimentation, l'environnement papier crayon comme laboratoire de recherche, le maintien des contraintes initiales, la crédibilité spatiale, tous ces aspects jouant de manière dialectique, semblent avoir permis une bonne dévolution du problème sur l'ensemble des séances.

Mais cela ne veut pas dire pour autant que le rapport des élèves aux connaissances ou objets du milieu, rencontrés dans les deux environnements, et pour les deux formes de terrain, ait évolué au cours des différentes séances.

Globalement nous avons pu repérer dans les deux environnements cour et papier, une même attitude de contrôle par les élèves de *leurs actions de résolution.*
Le seul impact réel de la variable « environnement » *sur les connaissances*, s'observe pour les procédures par symétrie axiale, où de fait le mode de validation par pliage possible dans l'environnement papier, n'est plus réalisable dans la cour de récréation.
Et le grand changement relatif au changement d'environnement se constate dans *le rapport aux dessins de construction* qui évoluent d'un environnement à l'autre.
Ce sont ces trois points que nous développons maintenant dans les trois paragraphes suivants.

2. Le rapport des élèves à leurs actions de résolution

Contrôle des propriétés spatiales ou géométriques

Dans les deux environnements, les élèves effectuent leurs prolongements de lignes droites sans prendre appui sur ces lignes. Ils ont une bonne estimation visuelle des alignements.
De même les angles, quand ils ne sont pas droits, n'interviennent que de manière implicite dans les constructions par estimation visuelle des écartements des deux côtés les définissant.
Les longueurs sont reportées de la même façon en utilisant un instrument de mesure (règle, décamètre).
Les constructions de droites parallèles ou perpendiculaires à une droite donnée passant par un point donné, quand elles sont intervenues, s'effectuaient sous le contrôle de la vue, et ne posaient pas de problème dans la mesure où les instruments étaient suffisamment grands pour chacun des environnements, pour effectuer ces constructions.

Le contrôle et la formulation des propriétés géométriques

Dans les deux environnements, les élèves ne formulent pas les propriétés géométriques, et ne les contrôlent pas non plus. Par exemple pour la construction d'un rectangle l'ensemble des propriétés du rectangle permettant une construction rigoureuse n'est pas présent. Les élèves contrôlent les angles droits sans contrôler l'égalité des longueurs des côtés opposés ou inversement.

L'usage des instruments

Les instruments sont utilisés de la même façon sur papier et dans la cour. Nous n'avons pas remarqué de rapport particulier à un type d'environnement. Par exemple l'usage de l'angle de 30° de l'équerre s'observe aussi bien dans la cour que sur le papier.

En conclusion, d'un point de vue général, le contrôle des élèves sur leurs actions, et les propriétés spatiales ou géométriques mises en jeu, s'effectue en général par la vue, de la même façon dans les deux environnements papier crayon et cour de récréation.
Nous pouvons reprendre ici une des caractéristiques de la problématique pratique définie par S&B, **les élèves exercent « un contrôle empirique et contingent sur leurs actions de résolution** ». Mais attention cela ne signifie pas qu'ils sont dans une problématique pratique par rapport à la résolution du problème.

Dans l'étude de la comparaison des deux environnements, cour et papier, nous retrouvons une constatation faite par S&B pour les expérimentations du problème rectangle, et du problème des bancs : les rapports au milieu sont de même nature pour les deux environnements, malgré la taille de l'espace, qui les différencie.

Nous avons déjà signalé en fin de paragraphe précédent que l'aspect très important de l'articulation de ces deux environnements, se situe au niveau de la dévolution du problème, et non pas du côté du rapport aux connaissances.
Cependant pour ce qui relève des procédures par symétrie axiale, il semblerait que l'articulation des deux environnements influe fortement sur l'émergence d'un rapport plus géométrique aux actions de résolution. Portons maintenant notre regard sur ce point.

3. Un dispositif « fondamental » pour la symétrie axiale

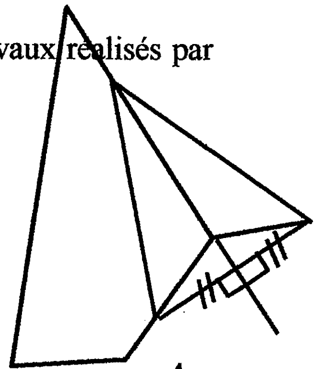
a) Observation globale

Le fait de pouvoir valider par pliage sur le papier la construction par symétrie axiale (ce que les élèves font rarement d'ailleurs), et le fait de dire que dans la cour de récréation on ne pourra plus plier, rend nécessaire la recherche d'autres arguments, pour construire, et être sûr que l'on construit bien. Des arguments de nature géométrique, en théorie.
En fait, la plupart des élèves effectuent dans la cour des constructions à vue.

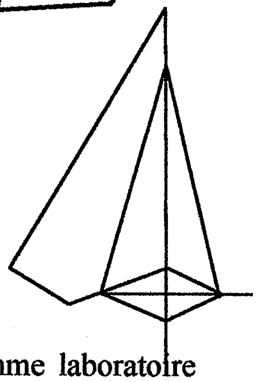
> Il est de la responsabilité du maître de faire la dévolution d'une nécessité de recourir à des arguments géométriques pour s'assurer d'une construction dans la cour de récréation.

Pour l'expérimentation, je ne suis pas intervenue. Sans doute volontairement, pour obtenir plus d'informations sur l'évolution des élèves dans un milieu adidactique où le maître serait absent. Et la précision mentionnée ci-dessus, des constructions à vue par les élèves, nous paraît de ce point de vue importante.

Toutefois nous avons mentionné, dans le compte rendu des séances, des travaux réalisés par quelques groupes.



Nous ne reprendrons pas en détail ceux de Arshe et Stéphane, qui procèdent de façon très experte par perpendicularité et équidistance à l'axe. (La figure ci-contre est celle sur papier produite par ces élèves, identique à celle produite préalablement dans la cour).



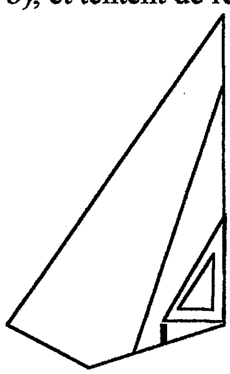
Signalons simplement que la mise en place dans la cour de récréation de cette construction est issue d'une première tentative de construction sur papier à la séance précédente. Arshe avait produit la figure ci-contre, dont il n'avait pu rendre compte au tableau du fait de l'orientation différente du dessin.

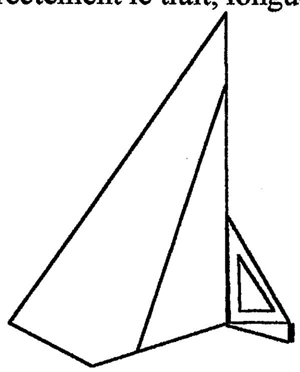
Ici l'articulation des environnements, la cour de récréation et le papier comme laboratoire d'essais, mais possédant un défaut majeur d'orientation intrinsèque (nous en parlerons dans le paragraphe 4 suivant), cette articulation a été propice à la mise en place d'un modèle géométrique cohérent, et même expert dans ce cas. Les élèves se sont dégagés des éléments non pertinents à la construction, pour ne conserver que le nécessaire.

Nous allons maintenant reprendre le travail de Damien et Marine dans la cour de récréation.

b) Damien et Marine : sans modèle pour une modélisation

Leur démarche aurait pu être citée en exemple pour la remarque sur la perception syncrétique des objets par les élèves. En effet, ils veulent construire le symétrique du côté a (par rapport au côté b), et tentent de reporter directement le trait, longueur et direction.





Pour cela, ils utilisent équerre et mesures de longueurs, en entrant sur le terrain. Ici aussi, comme pour le groupe orange, il semblerait que la recherche d'une méthode prenne le pas sur le respect de la règle. Ils ont

Par rapport au modèle sous-jacent, la symétrie, la notion présente dans leur procédure est la notion d'angle, mais elle n'est pas consciente pour les élèves.
Ils ont une intuition de positionnement, une intuition d'un des enjeux de ce positionnement, le report du côté *selon un bon écartement.*
Seulement voilà, ils ne disposent pas d'instrument approprié pour reporter cet écartement. (Le compas d'angle aurait été le bienvenu.)
A défaut de cet instrument, ils restent tout comme Hank et Jérémy, soumis aux contingences des mesures et de l'équerre, seul instrument lié à la notion d'angle.

> Ici encore nous sentons un manque de connaissances géométriques qui permettraient aux élèves d'avancer. Le maître doit-il intervenir ? Comment ?

c) Référence

Après les analyses précédentes, nous pouvons relire des textes relatifs à des recherches sur la symétrie axiale, avec un nouveau regard, ou tout du moins, une nouvelle piste de recherche. Pour n'en citer qu'un, reprenons un extrait du texte de C. Laborde relatif à l'apprentissage de la symétrie axiale[9] (appelée orthogonale dans l'extrait) :

> « Les stratégies de réponse fournies par les élèves dépendent du choix des problèmes auxquels ils sont confrontés. Des variables ont ainsi été dégagées dont les changements de valeur entraînent des modifications importantes dans les stratégies de réponses des élèves. [...] Dans le domaine de la géométrie ces variables concernent le type d'espace et les objets engagés dans le problème. La modification du fonctionnement des connaissances en situation problème peut aussi être obtenue en jouant sur deux autres caractéristiques de la situation :
> - les contraintes liées au matériel permis (instruments de tracé, de mesure, ...)
> - la finalité de la situation.
>
> Les choix de contraintes permet de modifier le type de contrôles possibles de la part de l'élève et donc la nature et la signification qu'il investit dans le problème. Prenons un exemple simple. Le pliage selon une droite permet

[9] C. Laborde (1988) *Problèmes de l'enseignement de la géométrie au collège,* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg, vol 1, p82-83.

- de décider si deux figures sont symétriques par rapport à une droite
- ou de trouver l'axe de symétrie d'une figure
- ou de construire le symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite

Dans tous ces cas la réponse est obtenue par la seule observation ; elle relève uniquement d'une activité immédiate de perception. En revanche si l'on empêche le pliage ou le retournement par un artifice quelconque (matériau rigide ou inamovible), les problèmes précédents requièrent pour leur solution l'utilisation de propriétés de la symétrie orthogonale (équidistance à l'axe de points symétriques, conservation des longueurs, ...). La transformation d'une simple situation d'observation, sans question pour l'individu qui observe, en un problème dans lequel il engage ses connaissances repose dans ce cas sur des contraintes rendant moins immédiates les décisions à prendre parce que les contrôles de type perceptif ont été empêchés. Ce sont les **savoirs géométriques** qui jouent le rôle **d'éléments de contrôle et d'instruments de décision.** »

L'artifice « quelconque » repose pour la situation « terrain et tige » sur l'articulation des environnements cour et papier.
Les éléments de contrôle et les instruments de décision ne sont des savoirs géométriques que pour l'observateur. Pour Damien et Marine, ils sont pour l'instant de l'ordre de vagues connaissances intuitives spatiales.

> Quelles sont les interventions du maître pour sortir de cette intuition et faire apparaître les aspects géométriques sous-jacents ? Ou préalablement les outils adaptés à leur construction ?

4. Le rapport aux figures (dessins) de géométrie

a) Dans l'environnement papier crayon, émergence de figures de géométrie

Le fait d'avoir fini la première séance dans la cour de récréation auprès du groupe orange nous expliquant leur méthode géométrique, et de se retrouver en deuxième séance dans la classe, à travailler sur papier à la recherche de méthodes, semble avoir favorisé l'émergence de procédures géométriques ; recours à la symétrie axiale, construction de losange, de parallélogramme.
Peut-être que si nous étions restés dans la cour, celles-ci seraient également apparues. Nous ne pouvons le dire.

Lors de la quatrième séance de retour dans la cour, les élèves effectuent des tracés au sol à la craie. Ils construisent des figures. J'avais sans doute effectué un changement de contrat lors

de cette quatrième séance en dessinant moi-même à la craie les tiges à l'intérieur des terrains contrairement à la première séance, où elles étaient matérialisées ; mais le travail durant deux séances consécutives en classe a aussi fortement influencé les élèves.
C'est peut-être un détail, mais nous le prenons comme le signe d'un changement de rapport aux constructions, qui nous permet non pas de confirmer, mais de conserver notre hypothèse : l'environnement papier crayon, comme moteur pour l'entrée dans un certain rapport avec des figures de géométrie.

Cet environnement possède quelques caractéristiques propres dont l'une est souvent mentionnée comme génératrice de difficultés dans les apprentissages en géométrie plane : l'orientation.

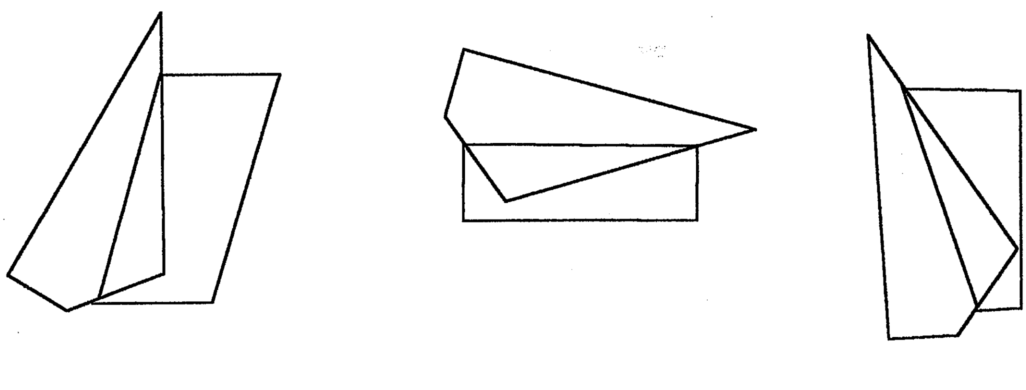
b) La question de l'orientation

Sur feuille de papier bon nombre de constructions restent soumises à la prégnance des directions horizontale et verticale. C'est un phénomène didactique souvent repéré dans les recherches en géométrie plane (C. Laborde, D. Grenier, ...) auquel il nous semble pouvoir peut-être apporter un nouvel élément. En effet **la prégnance de ces directions ne s'observe que dans l'environnement papier crayon, et non pas dans l'environnement cour de récréation**, pour des procédures relevant du même type.
Cet aspect a pu être mis en évidence à partir du travail sur les quadrilatères quelconques et non pas sur le terrain rectangulaire. Evidemment, celui-ci est entièrement soumis sur papier aux références horizontales et verticales, ce qui est somme toute assez naturel.

Reprenons quelques exemples :

i) Concernant les constructions de rectangles ou de parallélogramme

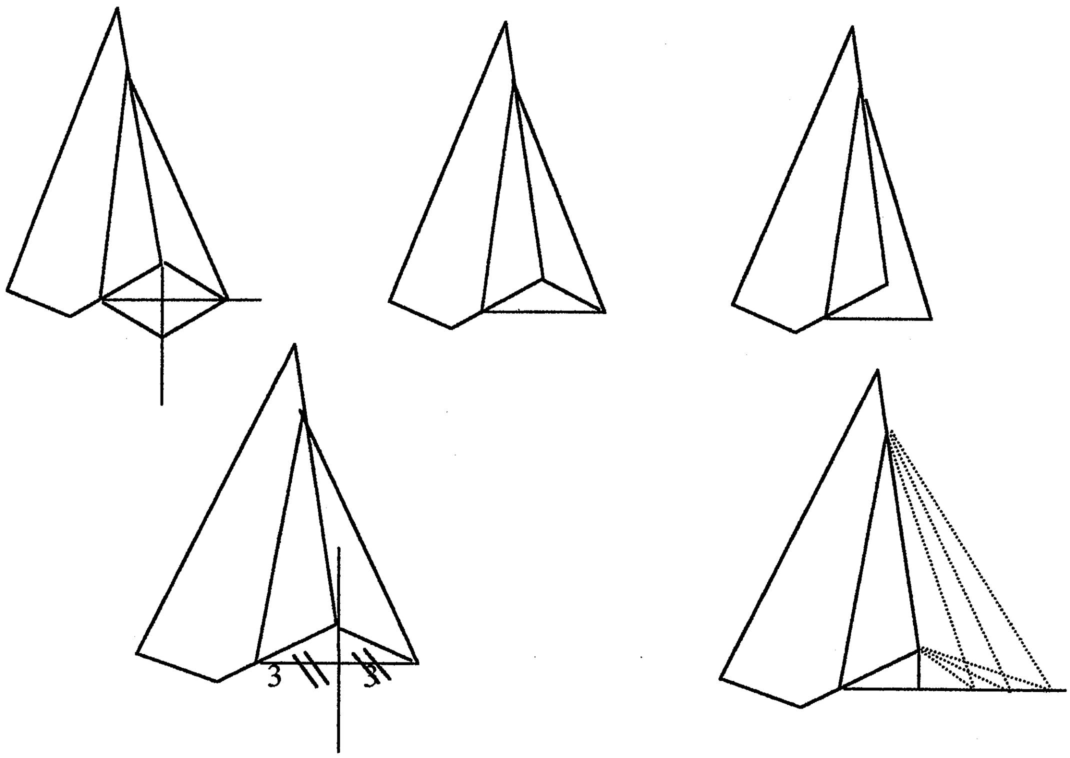
Sur papier nous avons pu observer des constructions correctes mais se référant à l'horizontale ou la verticale pour construire les angles droits, ou des parallèles. Ou bien des constructions erronées mettant clairement cet aspect en évidence.



Dans la cour de récréation, ce ne sont plus ces références qui permettent les constructions, mais l'orientation de l'élève par rapport au terrain et à la tige. En fait ce sont toujours **des références à des directions privilégiées, non plus par rapport à la feuille de papier, mais par rapport au sujet**. Celui-ci s'oriente par rapport au terrain de telle sorte qu'il visualise les configurations de façon la plus efficace pour lui.

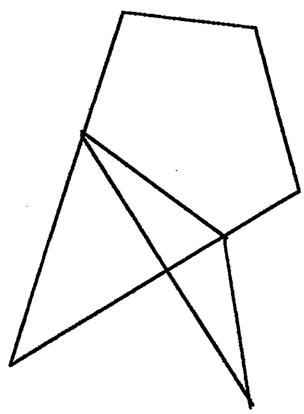
<u>ii) Concernant les procédures par symétrie axiale</u>

Nous avons pu observer lors de la troisième séance sur papier, avec une forme quelconque du terrain, des procédures erronées, liées à la référence à une symétrie d'axe vertical.

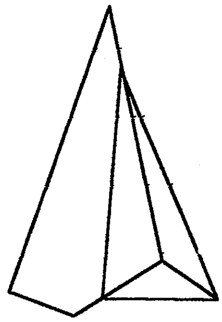


Ces constructions n'apparaissent plus non plus dans la cour de récréation. Dans cet environnement les élèves se positionnent d'eux-mêmes par rapport au terrain de sorte à mettre le côté du terrain qui sera axe de la symétrie « en face » d'eux. **Ils s'orientent par rapport au terrain** pour, ou bien estimer visuellement la position des lignes symétriques, ou bien réaliser une construction géométrique.

L'exemple de David et David est révélateur. Reprenons-le.



« Dans la cour de récréation ils avaient l'angle Â aigu et tous les angles du triangle formé avec la tige, aigus également. Après qu'ils aient réalisé une construction par une symétrie à vue d'œil avec une bonne approximation, je leur demande de préciser les choix qui président à l'orientation des traits. Un David me précise qu' « il faut faire droit ». C'est une expression souvent utilisée par beaucoup d'élèves, et qui signifie pour eux « perpendiculaire » en ne précisant jamais par rapport à quoi. Ici, c'est par rapport à l'axe (ils ne le précisent pas), et je leur donne la permission d'entrer sur le terrain pour faire la construction comme ils l'entendent. Elle sera faite comme sur la figure ci-contre. »



« De retour en classe, le terrain fourni sur la feuille ne correspond plus à leur terrain dans la cour. L'angle Â est maintenant obtus sur le dessin.
« On mesure la distance entre le trait et la tige = 3,9 cm »
(c'est a qu'ils mesurent et reportent)
« Avec l'accord de rentrer dans le quadrilatère nous traçons un trait pour que ça soit droit. » »

Dans la cour de récréation, les objets du problème sont suffisamment présents, le sujet est pris dans l'espace de résolution, les références de « il faut faire droit » sont intuitivement correctes. Or sur la feuille de papier, l'élève n'est plus dans l'espace de résolution, il n'est plus en contact avec les objets réels du problème, mais avec une image sur une feuille de papier ; il semble que se perdent les références au modèle sous-jacent exprimé dans « il faut faire droit ». Les objets devenant alors plus présents, sont la feuille de papier, et ses deux directions privilégiées horizontale et verticale. De fait « il faut faire droit » sur une feuille de papier signifie tracer un trait droit, horizontal ou vertical.

iii) Une hypothèse pour le travail sur les figures géométriques

Dans l'environnement cour de récréation, de par la taille des figures, et le fait que le sujet soit pris dans l'espace de travail, il se réfère toujours à des directions privilégiées. Peut-être peut-on continuer à les appeler horizontale et verticale : lorsqu'on est orienté regard vers l'horizon, horizontale, pour une ligne parallèle à la ligne d'horizon, et verticale pour celle qui fuit droit devant soi, de soi à l'horizon.
Ce phénomène naturel d'orientation permet dans cet environnement d'avoir une conscience et une présence des éléments de référence pour les constructions.

Comme il est nécessaire dans l'apprentissage de la géométrie de maîtriser également ses relations avec l'environnement papier crayon, il serait peut-être important de mettre en

simultané les deux environnements. C'est à dire de proposer lors d'une séance, que les élèves rendent compte de leurs procédures en les rédigeant *sur papier dans la cour de récréation.*
Le modèle de résolution dans la cour figure au sol, offre une comparaison directe avec la représentation sur papier, et peut par conséquent influer sur la maîtrise des directions privilégiées de la feuille.

Dans **l'articulation des environnements cour de récréation et papier crayon, le travail des élèves dans les deux simultanément** n'avait pas été envisagé. Il semblerait que cela soit important et **permettrait de remettre en cause la prégnance de phénomènes didactiques constatés sur papier crayon**.

5. Une seconde conclusion

Il nous semble que trois points généraux sont à retenir :

- Des éléments fondamentaux pour la dévolution du problème
- La crédibilité spatiale
- Le maintien des contraintes initiales du problème
- Le passage de la recherche d'un résultat, à la recherche de méthodes pour obtenir ce résultat
- L'articulation des environnements papier et cour de récréation pour la recherche de méthode, prévision et mises en œuvre, un certain caractère d'expérimentation.

- Concernant les problématiques

Les élèves exercent un contrôle empirique et contingent sur leurs actions de résolution, que ce soit dans la cour ou sur la feuille de papier, sans pour autant être dans une problématique pratique par rapport au problème. Au contraire, ils mettent en œuvre des connaissances de géométrie, ou des connaissances spatiales modélisables par des connaissances de géométrie, leur permettant d'imaginer des modèles de résolution ; et se posent la question de la réalisation spatiale de tel ou tel objet choisi en référence au modèle. La problématique de modélisation peut être explicitée.

- Concernant les environnements

L'environnement papier crayon est un environnement spatio-géométrique, où certains phénomènes sont inhérent à son utilisation (par exemple le problème de l'orientation de figures ; les trop petits écarts sur les mesures, ne permettant pas de remettre en cause des procédures erronées, ...) ; phénomènes qui n'apparaissent pas dans le travail sur les dessins (figures) dans la cour de récréation. Mais par ailleurs dans ce premier environnement

apparaissent des connaissances géométriques plus facilement et rapidement que dans l'espace sensible, ainsi il se constitue aussi en environnement géométrique.
C'est donc dans l'articulation dialectique des deux environnements que peut être rendue efficace la meilleure dévolution de la problématique de modélisation pour la construction (les apprentissages) des modèles géométriques utilisés.

Nous l'avions annoncé dès le chapitre 1, l'expérimentation « terrain et tige » ne constitue pas une ingénierie didactique, mais l'étude d'une modalité d'une situation fondamentale de la géométrie comme modèle de l'espace. Nous avons dégagé à travers l'étude des travaux des éléments de régularité, utiles pour l'analyse a priori ou a posteriori de situations futures. En vue de donner des pistes pour construire des situations didactiques issues de « Terrain et tige », il faut compléter ces éléments par d'autres non encore trop développés jusqu'à maintenant. C'est l'objet du dernier paragraphe.

III. De la situation fondamentale vers des situations didactiques

Une différence essentielle entre notre expérimentation et une situation didactique réside dans les objectifs d'apprentissage que peut se donner le maître (nous ne les avions pas fixés a priori) et sur les interventions du maître relativement à ces connaissances, en particulier les moments d'institutionnalisation.
Dans le but de ne pas orienter le travail des élèves dans telle ou telle direction, de ne pas focaliser sur certaines connaissances de géométrie, afin d'entrevoir un maximum de possibles (pour engendrer des situations didactiques variées), nous n'avons pas mené d'institutionnalisation avant la dernière séance de travail.[10] Et dans cette dernière séance, nous avons traité beaucoup (beaucoup trop) d'éléments, sur un long temps, en collectif et oralement avec le groupe classe, dans le souci de respecter un contrat minimal de travail avec les élèves sur l'ensemble des séances, plutôt que de réellement mettre en place une institutionnalisation[11]. Ceci ne constitue donc pas une bonne situation didactique.
Toutefois nous n'allons pas ici proposer de telles situations. Nous nous contenterons de repréciser des éléments entrevus au cours des paragraphes ou chapitres précédents qui nous paraissent importants à prendre en compte pour compléter l'analyse a priori.

1. Retour sur une négligence de contrat

Dans l'expérimentation nous avons négligé sous prétexte de l'expérimentation, et peut-être aussi par un manque de clarté de notre part un élément du contrat didactique fondamental dans l'optique de situations didactiques : le respect de la contrainte du terrain inaccessible. *Le problème de la mesure inaccessible existe de par l'inaccessibilité de la mesure.*
Ainsi comme le dit un élève lors de la cinquième séance,

> « Mais si on peut rentrer dans le terrain ils n'ont pas besoin de se compliquer la vie ils ont juste à mesurer directement. »

En effet le problème n'existe plus si on peut rentrer dans le terrain. On ne peut enfreindre cette règle du jeu sans annuler le jeu. En conséquence puisque c'est le maître qui propose ce jeu, il ne peut lui-même enfreindre cette règle.

---

[10] Chapitre 4B, annexe 2.

[11] Ainsi par exemple les éléments de la cinquième séance, sont à envisager comme des éléments permettant d'apporter certaines informations complémentaires pour notre étude a priori, en particulier des éléments pour des précisions sur des objectifs d'apprentissages, ou des institutionnalisations possibles, mais en aucun cas ils ne sont à considérer globalement.

Lorsque dans la cinquième séance je propose la méthode par symétrie axiale utilisant l'angle interne formé par les cotés a et b du terrain, je réponds suite à l'intervention d'élève précédente :
« on n'a pas besoin de se compliquer la vie on peut mesurer directement ». « Ça c'est sûr, mais quand on se dit on va faire de la géométrie quand même, on peut se dire « on rentre sur le terrain, mais on ne mesure pas la tige, et on continue de chercher une méthode géométrique. »
L'extrait de ce discours est révélateur d'une idée naïve et peut-être répandue que l'acceptation d'un contrat géométrique est transparent et normal pour les élèves, et qu'ils devraient l'accepter. Or il n'y a aucune raison qui justifie cette attitude. Dans cette situation ***on ne peut pas*** **se dire « on va faire de la géométrie quand même », en remettant en cause l'existence même du problème**[12].

Par contre quelle attitude adopte le maître quant aux travaux des élèves, comme le groupe orange ou Damien et Marine, qui, pour mettre en œuvre spatialement leurs méthodes, en oublient la contrainte fondamentale.
Il nous semble qu'ici il faut être plus nuancé : il est bon que les élèves reconnaissent explicitement qu'ils font intervenir pour leur résolution des connaissances de géométrie ; un des objectifs d'apprentissage général des situations de modélisation est de comprendre que « les concepts de géométrie sont utiles pour résoudre des problèmes spatiaux ». Mais d'autre part les élèves doivent aussi se confronter à *la cohérence entre le modèle choisi et son adaptation à la réalité spatiale du problème.*
Ainsi, laisser vivre un certain temps ces procédures où les élèves cherchent, sont en relation avec des connaissances de géométrie, et un moment d'interrogation sur le respect des contraintes, permettrait au maître de **faire dévolution de la problématique de modélisation : l'utilisation de connaissances de géométrie qui doivent être adaptées aux contraintes du problème, pour en permettre une validation pragmatique.**
Ceci constitue un élément d'institutionnalisation fondamental.
Mais, de la même façon ici que précédemment, mon discours auprès des élèves n'a pas été suffisamment construit et correct par rapport à cette idée.
En effet, au début de la deuxième séance, lorsqu'un élève signale que le groupe orange était entré dans le terrain lors de la séance précédente, je réponds :

[12] Nous avons proposé la situation « Terrain et tige » en formation continue, avec des quadrilatères quelconques dessinés dans une cour de récréation. Lors de la mise en commun (l'ensemble des stagiaires se déplace sur chacun des terrains pour écouter les différentes méthodes du groupe concerné) les stagiaires sont toujours très vigilants du respect de cette contrainte. Le prolongement de la tige par exemple est bien refusé comme non réalisable spatialement avec les instruments à disposition.

« Effectivement matériellement la méthode n'est pas correcte, mais mathématiquement elle l'est. C'est un problème important, de voir la différence entre ce qu'on peut faire d'un point de vue mathématique ou géométrique, et puis après de voir sur le terrain comment on va s'y prendre. »

Or, **déconnecter les aspects géométriques liés à la problématique de modélisation et la problématique de modélisation elle-même n'a pas de sens.**
Alors quel genre de discours pourrions-nous envisager, relativement à cette dévolution ?
La réponse à l'élève, et à la classe, aurait pu être (en deux temps, avec dans le premier temps une distinction entre la validité dans le modèle et la réalisation effective pour la procédure évoquée) :

« La méthode du groupe orange utilise des propriétés géométriques qui sont correctes par rapport au raisonnement. Elle permet de travailler des connaissances de géométrie, de revoir ou d'apprendre des propriétés sur le rectangle. Mais cette méthode n'est pas réalisable, et donc pas correcte, dans la mesure où elle ne respecte pas la contrainte de ne pas entrer sur le terrain.

Trouver une méthode correcte, c'est chercher des connaissances de géométrie, des propriétés géométriques, qui permettent de faire réellement des constructions, en respectant les contraintes du problème, et permettant d'aboutir à une réponse juste. »

Evidemment il serait naïf de croire que cela suffit, mais c'est avec le développement de cette remarque, au long des séances, dans divers contextes, et d'autres situations de modélisation, et modalités de travail, que pourra s'effectuer la dévolution cherchée.

Regardons un second aspect non suffisamment pris en compte dans l'expérimentation, mais indispensable à travailler pour une situation didactique : la question de l'explicitation, des formulations des propriétés géométriques en jeu dans les travaux des élèves.

2. Nécessité d'explicitations des connaissances géométriques

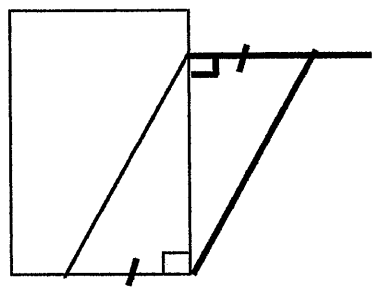
Voici une autre différence entre l'expérimentation et une situation didactique : nous n'avons explicité les connaissances en jeu dans les travaux des élèves qu'à la fin du travail, en cinquième séance (même s'il y eu quelques interventions éparses au cours du travail). Or **cette explicitation doit être présente quand elle est possible, à la fois dans le travail individuel des élèves ou d'un groupe d'élève au moment de la recherche, mais aussi dans les mises en commun, dans les synthèses intermédiaires, et dans les moments de rappels.**

D'autant plus que, pour les situations de modélisation, ces explicitations de connaissances géométriques sont relatives à deux types d'argumentation : celle relative à l'usage interne du modèle, et celle relative à l'adaptation du modèle pour la résolution du problème.
Par exemple au début de la troisième séance, lors de la présentation de la procédure « construction d'un parallélogramme » :

La validation interne correspond à : être sûr que l'on a bien construit un parallélogramme. On a construit un coté parallèle au coté a (car les deux sont perpendiculaires à la même droite), et de même longueur ; « un quadrilatère convexe avec deux cotés opposés parallèles et de même longueur est un parallélogramme » ; on lit la convexité sur la figure ; on déduit que notre construction est bien un parallélogramme.

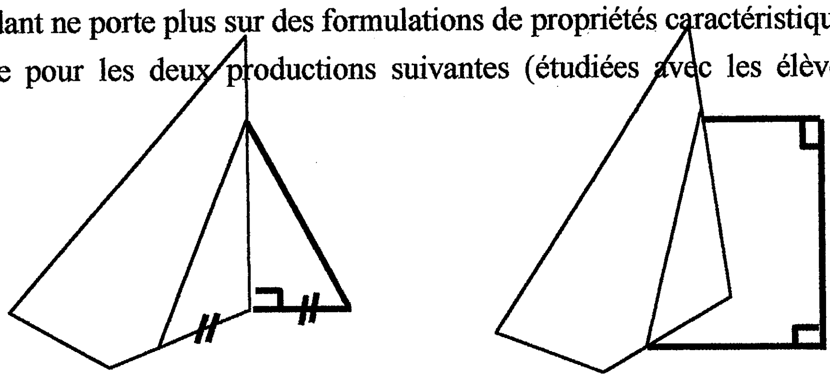
La validation externe correspond à :
le parallélogramme permet bien d'obtenir une longueur de la tige, car un des cotés est opposé à la tige, et « dans un parallélogramme les cotés opposés ont la même longueur ».

Construction d'un parallélogramme

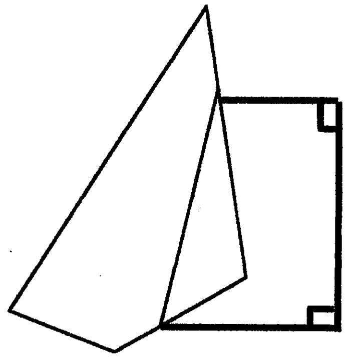


Nous voyons sur cet exemple que les arguments ne sont pas accessibles de la même façon. Ceux relatifs à la validation interne font appel aux propriétés caractéristiques de la figure ; ils sont longs, nombreux, et surtout ne rajoutent rien à l'appréhension perceptive que l'on a de la figure. Il est évident pour tous les élèves que la figure est un parallélogramme (ou *la figure qui convient* pour utiliser la propriété pour la validation externe à défaut de connaître son nom).
Ceux relatifs à la validation externe relèvent des propriétés de la figure (non plus caractéristiques). Ils sont directement accessibles pour la formulation, nécessitant moins de détour par d'autres propriétés géométriques. Et d'autre part leur nécessité d'existence a du sens et se justifie par rapport au problème.

Ajoutons que des propriétés géométriques apparaissent également pour justifier que certaines constructions sont erronées ; cela est à situer dans l'aspect interne de la validation, mais cependant ne porte plus sur des formulations de propriétés caractéristiques.
Par exemple pour les deux productions suivantes (étudiées avec les élèves en cinquième séance) :



Pour la figure de gauche, la conservation de la forme permet d'invalider la production et de dire qu'elle n'est pas une construction par symétrie axiale.
Pour la figure de droite, citons l'extrait de séance concernant cette figure :



Elle est fausse. Ce n'est pas un rectangle. Non.
Pourquoi ce n'est pas un rectangle ?
Parce qu'il y a un coté, ...la tige qui est dans le quadrilatère elle est en diagonale et celle qui est parallèle avec ... euh pas parallèle ...
Parallèle avec le bord de la feuille ...
Oui, elle est droite elle devrait être un peu penchée. [...]
Si par exemple on tourne complètement la feuille, on va bien voir que ce n'est pas un rectangle, par rapport au trait en bas.
Et puis même ...
Mais donnez moi un argument géométrique.
Le trait bas il est plus grand que là haut alors que dans un rectangle ...
Celui qui est parallèle à celui d'en haut il n'est pas de la même longueur.
Il y a une largeur qui n'est pas ...
Les largeurs ne sont pas égales.
Ce trait là ici et ce trait là ici ne sont pas de même longueur, or dans un rectangle, on sait que les cotés qui sont opposés ont forcément la même longueur, donc ça ne peut pas être un rectangle. D'accord ça c'est un bon argument. Il y a un autre argument encore que l'on peut donner.
Il y a deux côtés qui ont des angles droits, et les deux autres ils n'en ont pas.
Tout à fait, il n'y a que deux angles droits et les autres cotés ne forment pas des angles droits, or dans un rectangle il y a forcément quatre angles droits, donc ça ne peut pas être un rectangle, très bien. Bon, on range cette procédure là alors.
C'est bon alors ? Elle était bonne celle là ?
Ah non (protestation des élèves).
Réfléchis.
Comme ça n'est pas un rectangle, il a raison on n'avait pas fini, comme ça n'est pas un rectangle la longueur de la tige *(n'est pas la même que l'autre)* n'est pas la même que cette longueur là, parce qu'il faudrait pour que ce soit la même si c'était un rectangle ; on n'est pas là dans un rectangle, on n'a pas d'angle droit, donc ces deux cotés là n'ont pas la même longueur. On va vérifier rapidement ici, voilà là ça fait à peu près, ça fait 20 et là ça fait 21 ; là on est dans des choses très petites.

Dans un premier temps les élèves adoptent des arguments de type perceptif, puis sur ma demande changent de point de vue et proposent des arguments géométriques, même s'ils sont mal formulés géométriquement.

Un élève ensuite, repose la question de savoir si la figure est bonne, révélant par là plusieurs choses : ou bien le manque de distinction et d'explications des arguments de la validation interne et externe. Ou bien une autre conception erronée déjà rencontrée : l'isométrie des segments situés entre deux parallèles.
D'autre part, sentant que les arguments géométriques apportés de ma part n'avaient pas convaincu l'élève, j'en retourne à des arguments de mesures prises sur la figure au tableau, procédé absolument pas efficace du fait du très peu de différence entre les deux mesures.
Nous ne sommes pas à l'abri d'erreurs, qui viennent en contradiction avec nos objectifs. Il semble que cela soit un signe aussi des difficultés à prendre en compte certains aspects soulevés dans notre étude.

En conclusion concernant l'argumentation :
Nous retrouvons l'idée déjà mentionnée dans le chapitre 3A sur l'ostension : les propriétés géométriques se dévoilent bien, sont perceptibles, visibles, repérables, se formulent bien pour invalider certaines configurations. Dans le cas contraire leur reconnaissance fonctionne sur le mode de l'évidence perceptive, elles peuvent alors difficilement émerger.
Par contre la justification externe, de l'adaptation d'un modèle géométrique à la résolution d'un problème spatial, est pertinente, efficace et permet de bien formuler des connaissances géométriques.

Rappelons une des déclarations relative à la théorie des situations didactiques[13] :

> « L'enseignant a pour objectif principal le fonctionnement de la connaissance comme production libre de l'élève dans ses rapports avec un milieu adidactique.
> *Production libre* :
> réponse au milieu gérée par le sens, c'est à dire par ce que l'élève est capable d'interposer entre ses conditionnements, externes ou internes, et ses décisions ; cela implique pour lui la possibilité actuelle, et non pas seulement potentielle, de choisir entre plusieurs voies, pour des raisons « intellectuelles » ; cela implique aussi une production personnelle.
> *Milieu adidactique* :
> image dans la relation didactique du milieu « extérieur » à l'enseignement lui-même, c'est à dire dénué d'intentions et de présupposés didactiques. »

Or, dans l'étude menée, nous nous rendons compte que le milieu adidactique ne suffit pas pour renvoyer à l'élève des rétroactions nécessaires pour qu'il modifie, adapte, éclaircisse, formule les connaissances visées dans la situation. A plusieurs reprises pour beaucoup

---

[13] G. Brousseau (1988).

d'élèves nous sentons un manque dans les connaissances géométriques qui leur permettraient de contrôler leur rapport au milieu (relativement aux propriétés des quadrilatères, propriétés de la symétrie, sur la notion d'angle, ...).
L'intervention du maître est indispensable pour l'évolution du milieu objectif qui se constitue comme milieu adidactique au cours des différentes séances.

3. Quels objectifs d'apprentissages ?

Deux types d'objectifs sont à poursuivre relativement à l'apprentissage de connaissances de géométrie : leur explicitation, formulation ; mais aussi l'établissement d'un rapport à ces connaissances, rapport lié à la problématique de modélisation.
Concernant les connaissances de géométrie, il semble que la symétrie axiale, la reproduction d'un triangle, l'utilisation de gabarits d'angles, la formulation de propriétés géométriques concernant certains quadrilatères (rectangle, losange, parallélogramme) sont à envisager initialement comme de possibles objectifs d'apprentissage. Cependant les choix que le maître fera sera fonction des procédures imaginées et mises en œuvre par les élèves.

L'important et l'essentiel pour ce genre de situation est le rapport établi par les élèves aux connaissances géométriques sous-jacentes à leurs productions. Rappelons les principaux points de l'articulation des connaissances géométriques dans une problématique de modélisation.

Deux points déjà mentionnés dans les paragraphes précédents :

- **la dévolution de l'existence de modèle et de l'adaptation du modèle à la réalité spatiale ;**
- **le travail autour de l'argumentation, avec les différents types d'argumentation.**

Un troisième point peut être ajouté : la distinction entre cas particulier ou cas général.
La distinction entre l'usage de connaissances en liaison avec une prise en compte de la spécificité spatiale de la situation, ou bien des connaissances généralisables, ...
Reprenons quelques exemples relatifs à ce troisième point.

L'engagement dans des procédures numériques[14]
Lors de la première séance dans la cour de récréation, à l'annonce du problème, les élèves s'engagent dans des procédures numériques qui ne sont soumises qu'à la contingence de la

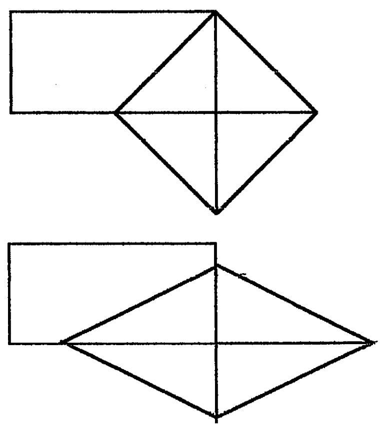
[14] Cf. chapitre 4B – I.2a.

configuration. Pour l'ensemble des élèves il s'agit de faire des calculs qui aboutissent à un résultat cohérent et acceptable pour le problème posé.
Dans la mesure où nous voulions cerner les aspects géométriques de la situation « terrain et tige », nous n'avons pas exploité ces procédures élèves, elles sont restées en suspens dans le traitement didactique.
Mais elles soulèvent la question du modèle, considérant qu'une formule (algébrique) est un modèle. Il peut alors être pertinent de travailler sur la question de l'élaboration de formules qui soient utilisables dans différents cas, et la question du degré de généralité d'une connaissance utilisée. Ce choix cependant ne nous paraît pas pertinent dans le cas de l'exploitation de la situation « terrain et tige », mais peut être une piste de travail plus générale.

Des procédures géométriques

Clairement visible dans le cas des procédures numériques, ce phénomène existe aussi pour l'engagement dans des procédures géométriques.

Par exemple un élève ayant placé la tige à 45° des cotés du terrain, et une extrémité à un sommet du rectangle, produit la configuration ci-contre (dans l'environnement papier).
Pour lui permettre de généraliser sa procédure[15], et rendre plus présent le losange comme figure de référence, je lui propose de refaire sa construction sur une nouvelle figure, où la tige est positionnée différemment (a différent de b).
L'élève après construction s'exclame : « Ah ouais ça marche aussi ! »



De la même façon, lorsque Hank[16] positionne les équerres pour construire un segment perpendiculaire à la tige, en prenant en compte les angles formés par la tige et les cotés du terrain, proches de 30 et 60 degrés, il utilise des connaissances de géométrie liées aux complémentarités d'angles ; tout en s'appuyant sur la spécificité spatiale de sa configuration.

Cette attitude nous paraît tout à fait naturelle, et à prendre en compte dans le traitement didactique des procédures des élèves. A prendre en compte à différents niveaux : pour expliciter les propriétés géométriques sous-jacentes (celles associées au cas particulier de la situation considérée par l'élève) ; et pour travailler sur le caractère de généralité des procédures, qui constituent un des éléments de la constitution des modèles.

[15] et me permettre de la proposer lors de la mise en commun.

[16] Cf. ce chapitre, I-2a.i.

Cette position signifie clairement **de la part du maître une attitude qui prend en compte ces « procédures géométriques à contingences spatiales particulières » et accepte de retarder, voire de traiter dans d'autres situations de l'aspect de généralité des procédures.**
Dans l'expérimentation, les choix que nous avions fait pour retenir telle ou telle procédure sont marqués par une position autre, que donc nous remettons en question maintenant : celle consistant à ne retenir que ce qui correspond à une procédure géométrique pouvant se justifier dans le cadre d'une problématique géométrique, et non pas les procédures géométriques pouvant se justifier dans le cadre d'une problématique de modélisation, où la spécificité spatiale ne peut être niée.
Il s'agit d'accepter des procédures qui ont un domaine de validité restreint à des cas particuliers. L'entrée dans la problématique géométrique se faisant lorsque se trouve poser la question de la généralité.

IV. Conclusion

Nous ne reprendrons pas l'ensemble des éléments dégagés dans les diverses conclusions des paragraphes précédents, mais proposons une synthèse organisée à partir de trois questions : que peuvent apprendre les élèves ? Quelles sont les interventions et les choix du maître nécessaires pour que les élèves puissent apprendre cela ? Et quelle est la faisabilité didactique de telles situations ?

1. Apprentissages des élèves

Trois points fondamentaux, qui eux-mêmes se déclinent en plusieurs points (les répétitions sont nécessaires et incontournables pour saisir l'aspect dialectique des divers éléments, enchevêtrés les uns aux autres) :

- **Apprendre la distinction entre résoudre un problème pratique et faire de la géométrie.**

Il existe des connaissances de géométrie qui peuvent servir à résoudre un problème, mais elles doivent être adaptées à sa réalité spatiale.

- **Apprendre ce que « faire de la géométrie » veut dire :**
  - c'est utiliser des connaissances de géométrie pour résoudre un problème pratique, qui se pose dans l'espace sensible, et donc aussi apprendre qu'elles sont utiles pour cela ;
  - c'est apprendre des connaissances de géométrie ;
  - c'est utiliser ces connaissances pour « raisonner » à travers une pratique d'argumentation.

- **Apprendre des connaissances de géométrie**

- Des propriétés de quadrilatères, formulées pour contrôler la validité interne ou externe des modèles (plutôt externe) ; ou bien pour justifier qu'une construction est erronée. En général elles ne servent pas pour contrôler une action, qui elle, reste sous un contrôle empirique et contingent, lié à un rapport pratique aux figures.
- Sur le triangle : une caractérisation par deux côtés et l'angle qu'ils forment.
- Pour la symétrie axiale : dans une situation qui aura pris du sens pour les élèves, une remise en cause de conceptions erronées, et la mise en évidence de techniques de construction, appuyées sur une recherche active des élèves et les interventions du maître, à l'occasion du travail des élèves, des mises en commun ou des moments d'institutionnalisation.
- La manipulation des instruments : équerre et gabarits d'angles essentiellement.

2. Interventions et choix du maître

Concernant les variables nous avons vu en quoi la forme du terrain et l'articulation des environnements cour de récréation et environnement graphique, sont des variables fondamentales pour les situations didactiques issues de « Terrain et tige ».

Pour repérer les interventions nécessaires du maître, il faut avoir repéré les différentes étapes dans le rapport des élèves au problème, et remarquer qu'à chaque fois, les élèves sont dans un rapport pratique aux objets de ces étapes. Le rôle du maître consiste alors à modifier ce rapport, ou bien par la tâche proposée, ou bien par les contraintes mises sur la tâche.

Par exemple, première étape : les élèves utilisent des procédures numériques, parce que la question porte sur la mesure d'une longueur, donc l'utilisation de nombres ; ils recherchent des formules, des combinaisons numériques pour obtenir un nombre.

Le maître doit intervenir pour orienter le travail sur des procédures géométriques, c'est à dire **déclarer ouvertement que la recherche doit porter sur l'usage de connaissances de géométrie pour résoudre**, et non l'utilisation des nombres.

Ensuite, il peut y avoir un groupe orange dans la classe, qui permettra comme dans notre expérimentation d'enclencher le travail sur la recherche de procédures géométriques ; ou bien il n'y a pas de groupe orange, et alors c'est au maître de jouer ce rôle. Un rôle de déclencheur d'un certain positionnement par rapport au problème, précisant ce que l'on cherche et dans quel domaine. Ceci étant clair pour les élèves, ils s'engagent ensuite facilement dans la recherche.

Lorsque les élèves se placent alors d'un point de vue « géométrique », ils restent dans un rapport pratique aux connaissances de géométrie, et aux environnements (graphique ou cour de récréation) qui les supportent. **Les interventions du maître pour favoriser un positionnement plus géométrique par rapport à ces connaissances doivent porter sur les questions d'argumentation**, qui obligent à formuler les propriétés utilisées. Rappelons que pour l'argumentation, une double validité est à gérer, une interne aux modèles utilisés et une externe relative au problème.

D'autre part le maître doit également intervenir pour préciser la dévolution de la problématique de modélisation, ce que nous avons appelé **la dévolution de l'existence d'un modèle et de son adaptabilité à la réalité spatiale.**

3. Faisabilité de la situation didactique

La gestion didactique d'une telle situation peut paraître complexe : elle nécessite d'accepter une certaine incertitude sur l'orientation du travail en fonction des productions des élèves ; elle nécessite des interventions relatives à des éléments liés aux rapports à la géométrie et non pas seulement des formulations liées au savoir.

L'étude a priori développée au cours de notre quatrième partie nous aide à analyser les productions des élèves et à faire des choix relativement à ces questions. Comment un professeur des écoles accède-t-il aux problématiques soulevées, aux pistes suivies et à la conviction d'user de telles situations pour les apprentissages en géométrie, reste une question ouverte.

CONCLUSION POUR LA QUATRIÈME PARTIE

La situation « Terrain et tige » a été étudiée comme une modalité d'une situation fondamentale de la géométrie comme modèle de l'espace.
Elle nous a permis de saisir la possibilité, sous certaines conditions, de faire entrer les élèves dans une problématique de modélisation, et d'entrevoir l'entrée dans une problématique géométrique à travers la pratique d'argumentation basée sur des connaissances de géométrie.
Les conditions à requérir, que nous retiendrons comme éléments de généralité pour les situations de modélisation, sont les suivantes :

- **la crédibilité spatiale d'une situation de référence à caractère adidactique pour laquelle les élèves sont dans un rapport effectif à l'environnement de travail (objets, actions, outils de résolution)**

- **l'articulation de l'environnement spatial et de l'environnement graphique comme lieu de représentation du problème et des actions de résolution.**

Pour la situation adidactique correspondante, nous avons pu observer que les élèves sont dans un rapport pratique aux objets et instruments du milieu, ils contrôlent leurs actions de manière empirique et contingente, mais font intervenir, souvent partiellement et de façon instable des connaissances qui relèvent du géométrique (ou bien directement géométrique, ou bien spatiales pouvant se formuler géométriquement). Ce rapport, au cours des différentes situations proposées dans le dispositif, évolue peu, quel que soit l'environnement de travail, et même si certains élèves utilisent des procédures plus ou moins géométriques, il leur manque souvent les connaissances pour contrôler leurs actions sur le milieu, de sorte que les rétroactions attendues n'ont pas lieu.

Mettre ces connaissances dans le milieu en tant que savoirs est incontournable pour permettre en premier lieu leur apprentissage mais aussi une dévolution des problématiques de modélisation et géométrique : en effet, l'entrée dans la problématique de modélisation se fait par la conscience que l'on a de l'existence de savoirs géométriques pour résoudre un problème, et qui sont adaptés à sa résolution spatiale. Et d'autre part l'entrée dans la problématique géométrique se fait à travers l'acceptation de la pertinence des arguments géométriques utilisés dans la résolution du problème. Dans les deux cas, il faut bien que les savoirs géométriques soient accessibles aux élèves et que ceux-ci aient l'occasion de se les approprier comme connaissances pour contrôler leurs actions et leurs arguments.

A quel moment alors ces savoirs vont-ils faire partie du milieu ? Et comment ?
Ou bien en amont, ils existent dans le milieu de référence car institutionnalisés antérieurement dans d'autres situations.
Ou bien lors du dispositif didactique, le maître les injecte *au moment où il faut*. Ce moment où il faut, c'est lors de la phase adidactique pour certains élèves utilisant ces connaissances implicitement ou sur une voie qui y mène, le maître intervient individuellement pour formuler ces connaissances et aider l'élève à les mettre en œuvre pour résoudre ou contrôler ses actions. C'est, pour d'autres élèves, lors des mises en commun, quand les élèves précédents exposent leur travail et explicitent à l'aide du maître, ces connaissances. C'est, pour d'autres encore, lors des synthèses, lorsqu'elles sont institutionnalisées par le maître.
Quand il formule les savoirs qui correspondent aux connaissances mises en jeu par les élèves, le maître va plus loin, et active en tant que connaissances utilisables par les élèves des savoirs nouveaux ou pas tout à fait stabilisés dans la classe.
En fait, **l'institutionnalisation, indispensable, ne peut être efficace que lorsque les élèves sont près et prêts ; par conséquent elle doit avoir lieu à différents moments de la situation didactique, et être adressée, selon ces moments, à l'élève ou aux élèves.**
C'est pourquoi la reprise et l'articulation des situations sont importantes, pour être sûr que tous les élèves, à un moment donné, ont été en interaction avec ces savoirs dans le milieu lors d'une phase adidactique, permettant de garantir une qualité des apprentissages.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans un premier paragraphe nous reprendrons des éléments de synthèse relatifs aux questions posées dans l'introduction pour expliciter la problématique générale. Ensuite nous proposerons les points qui nous paraissent fondamentaux pour établir une certaine approche de la géométrie à l'école élémentaire, et enfin, dans un dernier paragraphe nous élargirons le propos à la question de la formation des professeurs des écoles, acteurs centraux dans la mise en œuvre didactique des positionnements développés dans cette étude.

1. Reprise des éléments de synthèse

Pour traiter des « questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire » trois questions générales ont guidé l'étude ; pour chacune d'elles nous avons tenté d'apporter des éléments de réponse, parfois de nouvelles questions, afin de préciser et de faire avancer la problématique générale de l'articulation du spatial et du géométrique. Reprenons les, dans l'ordre des parties traitées, de manière cependant succincte, renvoyant le lecteur aux conclusions des divers chapitres pour une présentation plus riche et détaillée.

Faire de la géométrie à l'école implique l'usage d'images de géométrie. Quelle est la prise en compte du traitement de ces images dans l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire ?

Les conclusions proposées respectivement pour les images de géométrie plane et de géométrie dans l'espace valent pour l'ensemble : **il n'existe pas, dans l'enseignement actuel, de genèse didactique du traitement des images en géométrie**. Or elle est nécessaire ; non pas pour dépasser le rapport pratique qu'entretiennent les élèves avec ces images, rapport intrinsèque au travail lui-même, mais pour mieux cerner les « zones » de l'activité géométrique possible. Ou dit autrement, la genèse didactique est nécessaire pour repérer les incursions possibles du géométrique dans l'incontournable problématique pratique dans laquelle se placent les élèves en général.
Une piste a été dégagée, considérant divers statuts des objets de l'environnement graphique à prendre en compte d'un point de vue didactique : **les images comme outils pour modéliser des problèmes spatiaux ou géométriques ; et les images pour étudier des régularités de phénomènes visuels, propriétés visuelles ou spatiales récurrentes, traduisant des propriétés géométriques.**

Comment un appui maîtrisé sur des expériences spatiales et des manipulations permet-il de bâtir des situations d'apprentissage de propriétés géométriques ?

Le rapport pratique aux images de géométrie se généralise évidemment aux objets de l'espace sensible qui peuvent représenter des objets géométriques. Les manipulations et expériences spatiales, incontournables pour aborder la plupart des notions à l'école élémentaire, doivent également être contrôlées didactiquement pour en établir des caractéristiques qui les garantissent en tant qu'activité géométrique.
Nous avons montré en quoi l'ostension peut être un procédé didactique constructif dans ce sens, dans le cas de l'étude des patrons de solides et de la symétrie, sous réserve de variables bien choisies portant essentiellement sur le matériel utilisé, et les conditions de son utilisation. **L'ostension maîtrisée peut alors servir à la dévolution du milieu, ou d'un milieu pour la validation, de situations d'apprentissage des connaissances liées aux notions travaillées.** Déterminer, pour d'autres notions géométriques, si ce procédé peut également être envisagé est une question ouverte. Repérons simplement un lien entre patrons de solides et symétrie axiale : l'existence d'une définition opératoire se référant à un mouvement dans l'espace sensible.

Faire de la géométrie à l'école consiste à apprendre des connaissances de géométrie et apprendre que ces connaissances sont utiles pour résoudre des problèmes spatiaux.
Ces connaissances s'articulent avec des connaissances spatiales spontanément mises en œuvre par les élèves. Quelles sont les interactions entre ces deux types de connaissances ? Et comment favoriser cette articulation dans le contexte scolaire ?

Le constat est fait de l'incontournable problématique pratique dans laquelle entrent les élèves face à une situation donnée, que ce soit le rapport à l'environnement graphique, le travail à partir de manipulations, ou dans le cadre de situations de modélisation comme la situation « Terrain et tige ».
Nous avons tenté de montrer, dans les différentes parties, que l'on ne peut continuer à vouloir qu'il en soit autrement, et qu'au contraire **l'enseignement doit prendre appui sur ce fait pour établir des connaissances de géométrie ou placer les élèves dans une problématique géométrique ou de modélisation.**
Le procédé d'ostension décrit dans la troisième partie est un exemple de procédé didactique pour apprendre aux élèves des connaissances de géométrie, à partir d'expériences réalisées dans l'espace sensible, avec appui sur des connaissances spatiales des élèves, à l'occasion de situations qui ne comportent pas nécessairement de moment adidactique, et pour lesquelles les élèves sont dans un rapport pratique aux objets du milieu. Elles permettent de faire dévolution de questions de géométrie, c'est-à-dire d'entrer dans une problématique géométrique.

Les situations de modélisation au contraire, dont « Terrain et tige » est un exemple, sont des situations de recherche où le travail des élèves en phase adidactique est important, et va guider le maître dans ses décisions pour gérer l'avancée du processus didactique et les diverses institutionnalisations. Les élèves, bien que toujours dans un rapport pratique aux objets du milieu, entrent également dans une problématique de modélisation, avec des contrôles plus ou moins conscients des aspects géométriques sous-jacents à leurs procédures.

En conclusion de ce travail de recherche, et dans la perspective de le poursuivre, deux questions fondamentales restent à poser, qui justifient initialement et finalement cette étude : quel positionnement allons-nous adopter sur l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire ? Et comment faire dévolution de cette approche aux professeurs des écoles ?

2. Quelle approche de la géométrie à l'école élémentaire ?

Notre travail de thèse, joint à notre expérience de formateur de professeurs des écoles et de professeur de collège, nous amène à avancer quelques propositions permettant de caractériser certains aspects de la géométrie à l'école élémentaire qui pourraient être des hypothèses sur lesquelles appuyer de nouvelles recherches.

La logique d'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire ne peut pas, comme dans certaines approches, être une logique de la théorie, pour plusieurs raisons :

- *Les notions que l'on enseigne ne sont plus à l'heure actuelle les notions des fondements* : le point, la droite, le plan… sont des objets que l'on ne définit plus, pour lesquels il n'y a pas d'organisation didactique, mais dont on parle … que l'on utilise dans certaines activités de description.

- *La définition des concepts ne suit pas le même chemin que celui établi dans l'organisation de la géométrie.*
  Par exemple l'angle droit se travaille le plus souvent avant d'aborder les angles plus généraux ; il intervient comme un objet spécifique, et non comme cas particulier d'une notion plus générale, parce qu'il est présent par de multiples représentations dans notre espace sensible, accessibles à de jeunes enfants, beaucoup plus que d'autres angles …

- *Le lien entre les notions ne suit pas la même logique qu'en géométrie.*

Par exemple, les carrés, objets familiers des élèves dans l'environnement de l'école maternelle, peuvent permettre de définir l'angle droit comme « le coin d'un carré »[1] ; alors qu'en géométrie, on parle du carré comme un quadrilatère possédant quatre angles droits.

- *L'organisation par classement de familles d'objets pose également des problèmes du fait de la prégnance des rapports pratiques qu'entretiennent les élèves avec les objets de l'espace sensible (espace graphique compris).*
  Par exemple pour les quadrilatères la logique à l'école primaire est celle des formes : on a les carrés, les rectangles, les losanges, les parallélogrammes, les trapèzes ... et non la classification en familles et sous familles. Nous ne disposons pas de l'idée de propriétés caractéristiques, qui provient d'un souci axiomatique : avoir le minimum de propriétés pour définir un objet de façon nécessaire et suffisante. L'objet est là, il existe, et il s'agit de donner ses propriétés.

Ainsi l'organisation axiomatique, déductive, ou l'approche par corpus organisés de la géométrie ne semble pas adaptée pour l'approche de la géométrie à l'école élémentaire.

L'approche par les types d'activités génériques proposées dans les programmes (reconnaître, reproduire, construire, décrire) est peut-être une piste plus adaptée à ce niveau de la scolarité. Mais ici encore, en surface des analyses, nous rencontrons des problèmes : les activités de reconnaissance peuvent en général être résolues perceptivement, par la mise en œuvre d'un certain bon sens visuel. Les activités de reproduction et de construction mettent en œuvre l'usage d'instruments dont on ne sait si les aspects géométriques en jeu sont entrevus par les élèves. Les activités de description nécessitent de spécifier de quel point de vue on décrit, dans quelle direction on oriente le regard, ce que l'on veut décrire des objets que l'on observe.

Dans la mesure où la problématique pratique est une donnée incontournable de l'activité des élèves à l'école élémentaire, nous ne pouvons chercher dans les activités précédentes, à détourner les élèves des rapports pratiques qu'ils entretiennent avec les objets ou connaissances en jeu dans les activités. Il nous faut au contraire chercher en quoi, où et comment, un autre rapport peut s'établir, un autre point de vue peut s'envisager, qui relèverait du géométrique.

---

[1] L'angle droit pourrait même être appelé « angle carré ». Ne dessine-t-on pas un carré pour coder les angles droits sur une figure ? Pour élargir cette logique, ou pourrait parler des « angles rectangles », mais l'image générée par le carré propose plus de régularité perceptive pour cerner *sans ambiguïté* de quoi il s'agit, tandis que le rectangle propose plutôt à la vue la distinction des longueurs.

Par exemple dans notre étude sur les patrons de solides et la symétrie axiale, dans la troisième partie, nous avons entrevu en quoi une activité de reconnaissance peut être source de déclaration et d'utilisation de propriétés géométriques, à travers la problématique des arguments de validation. La tâche de l'activité doit être détournée clairement au profit d'une tâche d'argumentation (et non plus de reconnaissance). La validation positive reste soumise à la perception, tandis que la validation négative se formule en utilisant des propriétés géométriques, initialement entrevues comme propriétés spatiales ou visuelles.
Malgré cet exemple, il n'est pas évident de cerner de manière générale dans quelle mesure les activités génériques, reconnaître, construire, reproduire, décrire, peuvent être de véritables activités géométriques pour les élèves. La question reste complexe car dépendante des tâches, variables et organisations de l'activité. C'est pourquoi nous ne retiendrons pas non plus cette approche comme pouvant spécifier le géométrique de l'école élémentaire.

Nous resterons plus pragmatique dans l'approche que nous voulons développer, à partir des situations. Nous pouvons dégager différents types de situations où le géométrique n'intervint pas de la même façon dans les interactions des élèves avec un milieu :
Par exemple dans **des situations de familiarisation avec un environnement géométrique,** les objets manipulés par les élèves sont en lien avec le géométrique sans que l'activité effective ne le soit. C'est le cas par exemple de beaucoup d'activités en maternelle où l'environnement peut être constitué de formes ou d'objets géométriques, tandis que les tâches portent sur des productions de dessins, d'objets, ...

Pour les situations où le géométrique intervient a priori dans l'activité effective des élèves, nous pouvons repérer :
Des situations pour déclarer des connaissances géométriques
Ce point est développé dans la deuxième partie, autour des rôles de l'environnement graphique, ainsi que dans la troisième partie autour de « Ostension et manipulations ». Il s'agit de situations d'observation, comme par exemple les « démonstrations visuelles », ou la reconnaissance de figures ; et de manipulation pour des expériences spatiales, comme la mise à plat de solides ou le travail sur les sections du cube, situations permettant d'établir ou de conjecturer des propriétés géométriques.

Dans les propositions qui suivent, des institutionnalisations portent également sur des connaissances de géométrie, mais ce n'est pas ce qui les caractérise en premier au regard des interactions des élèves avec le milieu.
Des situations pour argumenter en utilisant des propriétés géométriques
Ce point est développé dans la troisième partie, autour de la problématique des arguments de validation et également autour de la situation « Terrain et tige ». Plutôt qu'en termes de

situation, ce sont des moments à l'intérieur de situations d'apprentissage où le travail porte spécifiquement sur l'entrée dans une problématique géométrique.

Des situations pour utiliser des propriétés géométriques dans la résolution de problèmes spatiaux

« Terrain et tige » constitue un exemple de ce genre de situations ; ce sont plus généralement les situations de modélisation, permettant d'entrer dans une problématique de modélisation. L'étude cependant demande à être conduite pour d'autres situations, différentes de « mesurer l'inaccessible ».

Des situations pour utiliser des instruments de géométrie, ou des outils familiers à la géométrie.

Nous pensons ici aux situations de tracés et de reproduction de figures, apprentissage de techniques de constructions ... pour lesquelles il faut tenir compte de la prégnance de la problématique pratique. Alors il s'agit d'apprendre à utiliser les instruments, les propriétés géométriques venant en compréhension de leur structure, et non l'inverse (qui serait d'utiliser des propriétés géométriques que les instruments permettent de réaliser).

Nous ne prétendons pas recouvrir l'ensemble des activités proposées à l'école élémentaire, mais tentons de préciser une catégorisation pour cerner où se trouve le géométrique dans les activités considérées, et percevoir également la multiplicité de procédés didactiques pour atteindre les objectifs d'apprentissage fixés.

Si nous admettons ces objectifs pour la géométrie à l'école, quelles conséquences pouvons-nous en tirer pour la formation des professeurs des écoles ?

3. Comment faire dévolution de cette approche aux professeurs des écoles ?

C'est une question bien vaste qui pourrait faire l'objet d'une recherche du type de celle que nous avons menée, surtout si nous voulons considérer comment s'effectue pour les professeurs eux-mêmes l'articulation du spatial et du géométrique, avant de définir des questions théoriques qui puissent guider des ingénieries didactiques de formation.

Nous voulons ici indiquer quelques éléments que nous avons pris en compte dans notre propre pratique de formateur.

Par exemple : l'appui sur le spatial, le visuel pour déclarer des connaissances de géométrie, et les limites de cet appui ; la distinction entre argumentation spatiale et argumentation géométrique ; le « faire de la géométrie » dans les contrôles que l'on exerce sur ses propres actions, et non pas dans les instruments ou techniques que l'on utilise ; ces trois points généraux sont traités lors d'une séance en formation continue sur la symétrie axiale dont nous rendons compte en annexe 1 du chapitre 3C.

Pour ce qui suit nous nous appuyons sur trois journées de formation continue menée en avril mai 2001, dont le déroulement est fourni en annexe de la conclusion, au cours desquelles les thèmes ont été traités, avec, en arrière plan de la préparation de formateur, les réflexions exposées dans notre étude. C'est à l'issue de ce travail qu'il nous semble pouvoir dégager quelques éléments importants à prendre en compte dans la formation.

- **La diversité des situations didactiques pour « faire de la géométrie »**

Cette diversité repérée précédemment, pour être compréhensible et ressentie comme importante, doit pouvoir être transférée dans les situations proposées aux professeurs des écoles. Ainsi dans les situations que nous leur soumettons, se trouvent à la fois des situations de modélisation (le travail sur les kaléidocycles constitue un exemple de construction d'objet ; la situation « Terrain et tige », une situation de modélisation d'un problème spatial où la taille de l'espace importe dans la présentation du problème) ; des moments déclaratifs de connaissances géométriques (les rappels mathématiques sur les solides par exemple), de connaissances sur les difficultés des élèves (les analyses de travaux d'élèves sur les représentations planes) ; des moments d'ostension à partir d'un travail effectif des stagiaires (le repérage des connaissances autour des patrons de solides à partir d'un regard sur les manuels) ; des moments d'utilisation d'outils pour reproduire (la construction finale du kaléidocycle, les productions de matériel pour les démonstrations visuelles sur les patrons) ...
Evidemment ces choix sont guidés également par des raisons de rythme et d'organisation du travail, mais plus profondément ils se justifient par la multiplicité des types de liens que nous voulons établir entre les professeurs des écoles et ce que nous considérons être « faire de la géométrie à l'école ».

- **Le rapport effectif des professeurs des écoles avec les objets du milieu des situations proposées ou évoquées.**

Le matériel utilisé est à penser de manière à ce que l'intérêt d'utiliser *un matériel adapté à la compréhension de sa fonction didactique*, puisse pour les professeurs, se transférer au travail qu'ils envisagent avec les élèves dans les classes.
Par exemple les kaléidocycles à manipuler personnellement pour percevoir les éléments de leur structure, servent à la dévolution du problème de leur construction et à l'appréhension d'éléments de résolution ; le matériel de « démonstration visuelle » des patrons aide à l'illustration d'une proposition didactique, basée sur le procédé d'ostension ; les solides « complexes », construits avec le matériel d'assemblages de pièces en plastique, pour travailler sur la construction de patrons, sert à la compréhension de l'articulation entre expérience effective et évoquée, ... la situation « Terrain et tige », à résoudre en conditions

réelles, aide à percevoir ce que la problématique de modélisation recouvre, et comment elle s'articule avec la problématique géométrique.

- **L'explicitation des connaissances en jeu dans les activités étudiées.**

Cette explicitation nous paraît incontournable dans la mesure où ces connaissances sont les raisons d'être des activités, et restent implicites la plupart du temps dans les outils utilisés par les professeurs. Il nous paraît être du rôle du formateur, en tant que spécialiste, de clarifier ces connaissances et d'en trouver des formulations à la fois adaptées à la classe et justes du point de vue géométrique. Le discours du maître doit être clair sur les connaissances qu'il veut que les élèves acquièrent.

Rappelons qu'il y a des connaissances de géométrie, et il y a des connaissances sur la géométrie. Pour les premières, il s'agit à la fois des connaissances de géométrie, répertoriées dans le corpus, et des connaissances spatiales, issues d'un rapport pratique à l'espace sensible en relation avec la définition ou les propriétés d'une notion de géométrie. Pour les dernières il s'agit des connaissances relatives à la dévolution des problématiques de modélisation ou géométrique, que nous avons mentionnées à plusieurs reprises dans les diverses parties.

4. Retour à l'origine

Notre objectif de travail pour cette recherche était double :

- Nous approprier, approfondir et faire fonctionner des concepts de didactique, outils pour une analyse fine des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage : les notions de milieu et de situation fondamentale, de la théorie des situations, établis par G. Brousseau, et les différentes problématiques dégagées par M-H. Salin et R. Berthelot.
- Etablir un certain nombre de positions, analyses et propositions, qui permettent d'avancer de façon pragmatique dans la prise en compte de ces phénomènes dans l'enseignement à l'école élémentaire.

Nous espérons avoir contribué à comprendre ce que « faire de la géométrie » veut dire à l'école élémentaire, et « il reste beaucoup de chemin à parcourir »[2].

[2] S&B p363.

BIBLIOGRAPHIE DES REFERENCES

1. ALAUZET C. (1999) *Comment amener les élèves à utiliser un plan ?* Mémoire professionnel de professeur des écoles stagiaire deuxième année, IUFM de Créteil, Centre de Livry-Gargan.
2. APMEP *« Evaluation des programmes de mathématiques » à différents niveaux du collège et du lycée.*
3. APMEP *Aides pédagogiques pour le cycle moyen, Elem-Math IX, Situations Problèmes,* Publication APMEP, n°64.
4. ARGAUD H-C. (1998) *Problèmes et milieux a-didactiques, pour un processus d'apprentissage en géométrie plane à l'école élémentaire, dans les environnements papier-crayon et Cabri-géomètre,* Thèse équipe EIAH, Laboratoire Leibniz, IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble I.
5. ARSAC et coll. (1992) *Initiation au raisonnement déductif au collège,* Presses Universitaires de Lyon.
6. ARTIGUE M., ROBINET J. (1982) *Conception du cercle chez les enfants de l'école élémentaire,* Recherches en didactique des mathématiques, Vol 3.1, p5-64.
7. BAUTIER T. (1988) *Une modélisation didactique des activités d'enseignement des premières propriétés de la symétrie orthogonale plane,* Séminaire de Didactique et d'Informatique, LSD IMAG, Université J. Fourrier, Grenoble.
8. BERTHELOT R., SALIN M-H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire,* Thèse, Université Bordeaux I.
9. BERTHELOT R., SALIN M-H. (1994) *L'enseignement de la géométrie à l'école primaire,* Grand N n°53, IREM de Grenoble.
10. BERTHELOT R., SALIN M-H. (1995) *Un processus d'enseignement des angles au cycle III,* Grand N n°56, IREM de Grenoble.
11. BOURDIEU P. (1980) *Le sens pratique,* Ed. Les éditions de minuit.
12. BROUSSEAU G. (1983) *Etudes de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie,* Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, LSD IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1982-1983.
13. BROUSSEAU G. (1988) *Le contrat didactique : le milieu,* Recherches en didactique des mathématiques Vol. 9.3.
14. BROUSSEAU G. (2000) *Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. L'étude de l'espace et de la géométrie,* conférence Université de Crète.
15. BROUSSEAU N. et G. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire,* IREM de Bordeaux.

16. CHARNAY R. (1996) *Pourquoi faire des mathématiques à l'école,* ESF. Pratiques et enjeux pédagogiques.
17. Coll. (1987) *Le dessin technique,* sous la direction de P. Rabardel et A. Weill-Fassina, Ed. Hermès, Paris.
18. Coll. (1992) *Espaces graphiques et graphismes d'espaces,* ouvrage coordonné par A. Bessot et P. Vérillon, Ed. La pensée sauvage.
19. Coll. (1996) *A propos de patrons de solides,* Grand N n°57, IREM de Grenoble.
20. Coll. IREM de Strasbourg (1998) *Voir et raisonner : à la conquête de l'espace au collège,* Repères IREM n°33.
21. COLMEZ F., PARZYSZ B. (1993*) Le vu et le su dans l'évolution de dessins de pyramides du CE2 à la seconde,* dans Espaces graphiques et Graphismes d'espaces, Ed. La pensée sauvage, Grenoble.
22. COMAR P. (1992) *La perspective en jeu, les dessous de l'image,* Découverte Gallimard.
23. COPIRELEM (1996) *Document pour la formation des professeurs des écoles,* tome IV, « autour du thème des kaléidocycles » p91-101.
24. D'HENRIET L. (1877) Cours rationnel de dessin, à l'usage des écoles élémentaires. Ed. Hachette et Cie, Paris.
25. DENIS M. (1989) *Image et Cognition,* Presses Universitaires de France.
26. DOUADY R., PERRIN-GLORIAN M.J. (1989*) Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane,* Educational Studies in Mathematics Vol. 20 n°4 p387-424, Kluwer Academic Publishers.
27. DUBOIS C., FENICHEL M., PAUVERT M. (1993) *Se former pur enseigner les mathématiques,* Tome 1, Problèmes - géométrie, Ed. Armand Colin.
28. DUVAL R. (1993) *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée,* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol 5, Université L. Pasteur, IREM de Strasbourg.
29. DUVAL R. (1994) *Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique,* Repères IREM n°17.
30. DUVAL R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine,* Ed. Peter Lang.
31. DUVAL R. (1999) *Conversion et articulation des représentations analogiques,* Séminaires de recherche n°1, IUFM Nord-Pas-de-Calais.
32. ECO U. (1992) *La production des signes,* Livre de poche, Librairie Générale Française pour l'édition française, Indiana University Press.
33. FAVRAT J-F. (1995) *Les solides et les surfaces cylindriques à l'école élémentaire,* Grand N n°55, IREM de Grenoble.
34. FREGONA D. (1995) *Les figures planes dans l'enseignement de la géomét*rie, Thèse, Université Bordeaux I, IREM d'Aquitaine.

35. GALVEZ G. (1985) *El aprendizage de la orientacion en el espacio urbano : una proposicion para la ensenanza de la geometria en la escuela peimaria*, Thèse, Centre de recherches du IPN, Mexico.

36. GRENIER D. (1988) *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie axiale*, Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble.

37. JULO J. (1994) *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*, Presses Universitaires de Rennes.

38. LABORDE C. (1988) *Problèmes de l'enseignement de la géométrie au collège*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg, vol 1.

39. LABORDE C. et CAPPONI B. (1994) *L'apprentissage de la notion de figure géométrique*, Recherches en didactique des mathématiques, Vol 14 n°1.2.

40. LEMONIDIS E.C. (1990) *Conception, réalisation et résultats d'une expérience d'enseignement de l'homothétie*, Thèse, IRMA, Université L. Pasteur, Strasbourg.

41. MARGOLINAS C. (1995) *La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations*, dans Les débats de didactique des Mathématiques, Ed. La pensée sauvage, Grenoble.

42. NICOLAS-LORRAIN B. (2000) *Conceptualisation géométrique en formation de PE*, Actes du XXVIIème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres, Ed. IREM de Grenoble.

43. PERRIN-GLORIAN M-J. (1994) *Théories des situations didactiques : naissance, développement, perspectives*, dans Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France, Ed. La pensée sauvage, Grenoble.

44. RATSIMBA-RAJOHN H. (1992) *Contribution à l'étude de la hiérarchie implicative. Application à l'analyse de la gestion didactique des phénomènes d'ostension et de contradictions*, Thèse, Université Rennes I.

45. ROGINSKY R. (1999) *Rôle et impact du contexte de l'énoncé dans la résolution de problème en géométrie*, Mémoire professionnel de professeur des écoles stagiaire deuxième année, IUFM de Créteil, Centre de Livry-Gargan.

46. ROMMEVAUX M-P. (1997) *Le discernement des plans : un seuil décisif dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle*, Thèse, Université L. Pasteur, Strasbourg I, Ed. IRMA.

47. SORTAIS Y. et R. (1988) *Géométrie de l'espace et du plan*, Collection Formation des enseignants et formation continue, Ed. Hermann.

Manuels scolaires

48. *Travaux géométriques en 6ème*, A. Kuzniak et C. Taveau, Ed. Nathan, 1998.

49. *Nouvel Objectif Calcul*, Ed. Hatier, CP 1997, CE1 1998, CE2 et CM1 1995, CM2 1996.

50. *Diagonale*, Ed. Nathan, CP 1995, CE1 1992, CE2 1995, CM1 1996, CM2 1994.
51. *J'apprends les maths*, Ed. Retz, CP 1991, CE1 1992, CE2 1996, CM1 1998.
52. *L'heure des maths,* Ed. A. Colin, CE2 1999.

COMPLEMENTS BIBLIOGRAPHIQUES

53. ARTIGUE M. (1988) *Ingénierie didactique,* Recherches en didactique des mathématiques, vol 9/3.
54. ARTIGUE M. (1991) *Epistémologie et didactique,* Recherches en didactique des mathématiques, vol 10/2.3.
55. BKOUCHE R. *Variations autour de la réforme de 1902 / 1905*, dans La France mathématique, édité conjointement par la Société Mathématique de France et les Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences.
56. BKOUCHE R. (1991) *De la géométrie et des transformations,* Repères IREM n°4.
57. CARON-PARGUE J. (1981) *Quelques aspects de la manipulation. Manipulation matérielle et manipulation symbolique.* Recherches en didactique des mathématiques vol. 2.1.
58. CARON-PARGUE J. (1987) *Une approche de la genèse de la production graphique. Le dessin du parallélépipède,* dans Le dessin technique, P. Rabardel et A. Weill-Fassina éditeurs, Hermès, Paris.
59. CHEVALLARD Y., JULIEN M. (1991) *Autour de l'enseignement de la géométrie au collège,* Première partie, Petit X n°27 ; deuxième partie, Petit X n°42.
60. FISCHBEIN E. (1993) *The theory of figural concepts,* Educational Studies in Mathematics, vol 24 n°2.
61. FISCHBEIN E., MARIOTTI M-A. (1997) *Defining in classroom activities,* Educational Studies in Mathematics, vol 34 n°3.
62. GONSETH F. (1936) *Les mathématiques et la réalité,* Ed. A. Blanchard, 1974.
63. GONSETH F. (1946) *La géométrie et le problème de l'espace,* Editions du Griffon.
64. GUILLAUD J.C, ROBARDET G. (1997) *Eléments d'épistémologie et de didactique des sciences physiques,* Presses Universitaires de France.
65. HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (2000) *Formation des maîtres et paradigmes géométriques,* Recherches en didactique des mathématiques vol 20.1.
66. LURCAT L. (1976) *L'enfant et l'espace, le rôle du corps,* PUF.
67. PAIS L.C. (1991) *Représentation des corps ronds dans l'enseignement de la géométrie au collège, pratiques de l'élève, analyse de livres,* Thèse de doctorat de spécialité en Mathématiques Fondamentales Appliquées, Université de Montpellier, IREM de Montpellier.
68. PECHEUX M-G. (1990) *Le développement des rapports des enfants à l'espace,* Nathan Université.
69. RABARDEL P. (1995) *Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains,* Ed. A. Colin.

70. ROMMEVAUX M-P. (1991) *Le premier pas dans l'espace,* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives n°4, IREM de Strasbourg.

TABLE DES MATIERES

Annexes

Sommaire des annexes

Extraits de l'intervention de Guy BROUSSEAU
Laboratoire DIDIREM - IREM de Paris 7 - Université Paris 7
le 11 janvier 1999

On a culturellement l'habitude de confondre la géométrie avec l'espace, et de trouver transparents les rapports qu'ils entretiennent. Or il faut renoncer à cette idée là, la géométrie est effectivement le moyen culturel de repérer ce qui est spatial, ce qui est de l'ordre de l'espace ; mais la géométrie des mathématiciens s'est enrichie de très nombreuses de réflexions utiles ou inspirées de ce premier problème et qui n'ont plus grand rapport avec nos propres rapports avec l'espace. La géométrie, c'est un objet culturel, et c'est ce moyen culturel que nous utilisons, pour repérer nos rapports avec l'espace ; mais nos propres rapports avec l'espace ce n'est pas de la géométrie, c'est autre chose. L'espace pour un individu, ses rapports avec son environnement, les connaissances qu'il développe naturellement pour gérer ses rapports avec l'espace, ne sont pas des transcriptions de connaissances géométriques. Il faut partir à la base sur cette idée que ce sont deux objets différents. Donc on se servira de la géométrie éventuellement pour décrire quelque chose qui se passe dans l'espace, mais cela ne veut pas dire que c'est cela qui est conçu par le sujet comme moyen d'intervenir dans l'espace. [...]

La théorie des situations permet de décrire les relations d'un sujet avec les objets de l'espace. Les connaissances spatiales du sujet peuvent être définies par le rôle qu'elles jouent dans les interactions avec les éléments spatiaux de son milieu. Cette définition fonctionnelle des connaissances spatiales ne postule pas que les connaissances des élèves sont conformes ni même « contenues » dans les connaissances de géométrie, mais elle permet de prévoir et d'expliquer les adaptations du sujet et donc ses apprentissages, du moins ceux qui font appel à ses capacités d'adaptation. [...]

Je prends l'exemple du traitement des figures planes. Il faut être conscient de ce qu'il y a une dévolution du traitement de l'espace d'une partie de la gestion des informations mathématiques qu'on va faire. On demande dans l'enseignement secondaire de faire des démonstrations mais ces démonstrations ne portent que sur une partie des questions de géométrie. Toutes les questions d'incidence par exemple, trop difficiles pour les élèves, seront exclues des démonstrations et seront supportées par les contacts avec la figure. Si vous n'avez pas de figure de géométrie vous ne pourrez pas faire de démonstrations formelles parce que vous ne pourrez pas décider si ça va se couper dans cette région ou pas ...
Ce milieu des figures planes est un milieu qui prend à sa charge la gestion d'une partie des informations nécessaires pour faire les démonstrations. [...]

Sur la distinction micro, méso, et macro espace

Cette distinction caractérise le milieu et en même temps les connaissances nécessaires pour le milieu. Le mot espace est employé dans les deux sens.

Le micro espace c'est les connaissances nécessaires pour gérer les petits objets devant soi et c'est en même temps le milieu des petits objets qu'on peut toucher, déplacer ... Quelles sont les connaissances, les relations, qu'il faut pour gérer le micro espace ? [...]

Le micro espace donne les conceptions de bases.

Ce n'est pas la taille de l'espace qui compte c'est la manière dont je le regarde et la nature des rapports que j'ai avec lui.

On ne construit pas une conception de ses propres déplacements, ce sont les objets qui se déplacent par rapport à vous. Vous prenez la maîtrise de l'objet par les mouvements que vous leur faites subir à eux, mais le point de vue du sujet n'entre pas dans le modèle, il est toujours fixe par rapport à ce qu'il regarde.

Au contraire le méso espace c'est un espace dans lequel la connaissance qui va se construire est la connaissance des propres déplacements du sujet par rapport à un univers qui lui est fixe. Il prend conscience de la coordination des mouvements à travers des trajectoires, ce sont les trajectoires qu'il peut faire dans l'espace qui vont l'informer sur ce qui se passe autour de lui.

Dans le macro espace, je vais connaître mes rapports à l'espace par les déplacements que je ferais dedans par des recollements de cartes, des recollements de méso espace, et donc il est indispensable pour moi de connaître le méso espace pour explorer le macro espace. Le méso espace sert de modèle pour les élèves, pour les enfants ordinaires, pour le macro espace. [...]

Une situation fondamentale n'est pas forcément une bonne situation didactique.

Pour qu'une situation permette aux élèves dans des conditions raisonnables de produire de façon originale la réponse à la question posée et de développer des connaissances nécessaires il faut bien plus de propriétés que pour être une situation fondamentale. Et il faut bien distinguer les deux.

Si je prends comme instrument didactique une situation fondamentale il se peut que je sois obligé de donner la réponse, de l'expliquer, en disant « voilà le problème posé et voilà comment on le résout. Eh ben oui ça a été très dur de le trouver, je ne vais pas vous en faire l'histoire, mais voilà, regardez comme ça marche bien ». Ah oui, et bien je l'apprends et je le fais.

Il y a eu un usage de la théorie des situations au service d'une idéologie non directive dont je peux partager un certain nombre d'ambitions légitimes, mais qui s'est fermée dans des ordres pas toujours explicités mais vécus par les professeurs comme des obligations de ne pas donner l'information ... et qui a fait des débordements ridicules quand manifestement les élèves ne pouvaient pas produire la réponse. Alors on faisait semblant de leur poser le problème, on faisait semblant de les faire chercher, on leur demandait de dire ce qu'ils avaient vu, et on glissait avec la dissimulation didactique habituelle la réponse, et on perdait un temps fou pour finalement arriver exactement au même résultat. La recherche avait été inutile, tout avait été une perte de temps, la dévolution n'avait servi à rien et finalement on avait passé son temps à cacher le fait qu'il fallait bien donner la réponse aux élèves.

La didactique ne consiste pas à faire comme ça des choix idéologiques. Le meilleur système est celui qui permet au plus vite, au plus grand nombre d'élèves, de comprendre et d'utiliser ce qu'on veut leur dire. Et s'il suffit de leur dire ce qu'il faut faire pour qu'ils l'aient compris et qu'ils l'apprennent faisons-le. Ne faisons pas de mélasse didactique là où il n'y en a pas besoin. Quand on procède toujours comme ça, ça ne va pas bien ; si on résout toujours tous les problèmes d'un enfant avant qu'il ne se les soit posés il n'apprendra rien ; tout est une question d'équilibre. Et les problèmes de didactique ce n'est pas de définir des méthodes c'est de dire à quel moment elles arrêtent d'être efficaces et comment on peut le cas échéant les utiliser.

Le macro espace est-il le laboratoire de la géométrie ?

Probablement qu'historiquement c'est quand même le macro espace qui a été le moteur principal pour faire émerger les connaissances spatiales qui ont servi de base à l'étude de la géométrie. Je ne crois pas qu'on n'ait jamais eu besoin de la géométrie pour résoudre ces problèmes de rapport d'un sujet avec son micro espace. Par contre dés lors que vous vouliez fabriquer des pyramides, dés lors que vous vouliez fabriquer des temples, dés lors que vous vouliez fabriquer des objets très grands, et coûteux ... vous aviez des problèmes à résoudre par des connaissances explicites. Et l'économie que procure un raisonnement par rapport à une expérience devenait parfaitement décisive.
Par contre dans le micro espace l'expérience est presque toujours plus économique que le raisonnement.

Un projet pour l'enseignement de la géométrie à l'école primaire

Il faut qu'il y ait un projet culturel pour pouvoir aborder un problème nouveau avec cet instrument là, que sont les mathématiques. Or c'est ça qui n'est pas fait, la géométrie ne fait pas partie de la culture primaire ou plus exactement on n'a pas refondé avec une épistémologie actuelle l'intrusion de la géométrie dans l'enseignement primaire. La géométrie joue le rôle que jouaient les mathématiques modernes à une époque d'échappatoire ; ça fait bien, on fait voir qu'on fait des mathématiques parce qu'on fait de la géométrie. Le projet didactique n'est pas cohérent, peu importe, et on voit un tiers des programmes réservé à la géométrie alors qu'on aurait des choses plus utiles à faire et ça n'aboutit à aucune connaissance utilisable. Il y a là un traitement des objets d'apprentissage qui est culturel pour ne pas dire mondain.

Document de formation, Année 1997/1998
Centre IUFM de Livry-Gargan, IUFM de Créteil
S. Gobert

Atelier professionnel, PE2

Propositions de travail en géométrie, autour du thème des solides, avec utilisation du matériel Polydrons*

Ce dossier est construit à partir des comptes-rendus réalisés par les étudiants suite à leurs travaux dans des classes de CP, CE1 et CE2, ainsi que des remarques commentaires et analyses successives faites lors de séances de travail à l'IUFM.

Il est structuré dans l'ordre des situations proposées en classe.

1. **Familiarisation avec le matériel Polydrons. Constructions de solides**

2. **Reproduction de solides**

3. **Reproduction de solides : le jeu du sac**

4. **Mises à plat de solides**

5. **Reconnaître si une représentation plane est ou non le patron d'un solide**

---

* Pièces en plastique avec encoches permettant des assemblages en volume ; carré, losanges, triangles équilatéraux, pentagones, hexagones et octogones réguliers. Ce matériel n'est plus distribué à l'heure actuelle (2001) mais d'autres systèmes existent. Par exemple « Clixi-géométrie », qui propose une variété plus grande des formes des pièces (en plus de celles citées, triangle isocèle, triangle rectangle isocèle, rectangle), distribué par Soc. FRANGERM, Saint Louis (France).

Fiche 1

Familiarisation avec le matériel Polydrons

Construction de solides avec le matériel Polydrons

Objectifs (que le maître vise pour ses élèves) :

- Découvrir le matériel, résoudre les problèmes techniques d'accrochage
- Acquérir ou réinvestir un vocabulaire géométrique : le nom des différents polygones pièces.
- Distinguer un objet dans le plan, d'un objet en volume.
- Distinguer les objets ouverts des objets fermés.

Aspects mathématiques sous-jacents :

- Nommer et éventuellement redéfinir suivant le niveau de classe certains polygones particuliers : triangle équilatéral, carré, losange, pentagone régulier, ...
- Définir d'un point de vue géométrique un solide comme un objet fermé.
- Expérimenter l'articulation espace/plan, par la manipulation, la mise en mouvement (pliage, articulation) des pièces assemblées.

Phase de présentation du matériel

Envisager cette présentation comme un moment à part entière de la situation, et donc le distinguer dans la préparation, la mise en œuvre, le rythme de la séance. Cette phase est nécessaire dans son principe et ses contenus, au début de la séance, permettant ainsi l'usage d'un vocabulaire précis et adapté durant toute la séance et les suivantes.
La présentation comprend deux éléments : les pièces, en tant qu'objets individuels, et le principe d'accrochage des pièces les unes aux autres.

- Pour la présentation des pièces

Consigne : « Nous allons travailler en géométrie avec un nouveau matériel : les Polydrons. Ce sont des pièces en plastique de formes particulières, qui peuvent s'assembler les unes aux autres. Est-ce que vous connaissez ces formes et le nom qu'on leur donne en géométrie ? »

Les élèves précisent ce qu'ils connaissent. En général, dès le CP, les termes "carré" et "triangle" sont connus, avec les justifications « carré, il y a quatre côtés », « triangle, il y a trois côtés ».
Le maître peut apporter quelques précisions : en faisant comparer le losange et le carré par exemple. « Tous les deux ont quatre côtés, mais l'un a des angles droits, l'autre non ». On peut aussi faire remarquer que les côtés ont la même longueur.

De même le maître peut préciser que la pièce triangle est particulière. Ses trois côtés ont la même longueur, on dit que c'est un triangle équilatéral.
« La pièce à cinq côtés a une forme appelée "pentagone" (5 côtés). »
« La pièce à six côtés a une forme appelée "hexagone" (6 côtés). »

Prévoir la réalisation d'une affiche contenant pour chaque type de polygone :
- un polygone pièce (l'objet matériel),
- le polygone représenté comme figure géométrique (tous les côtés sont droits, n'apparaissent plus les encoches ni les couleurs).
- le nom du polygone (préciser que *ce nom se rapporte à la figure géométrique* ; comme la pièce en plastique a la même forme, on lui donne le même nom).

Cette affiche servira tout au long du travail, elle sert de mémoire pour le vocabulaire et les représentations des figures géométriques. Elle sera indispensable pour l'activité *Reproduction de solides, le jeu du sac.* (fiche 3)
Elle peut être construite avec les élèves au fur et à mesure, ou bien préparée (en partie ou non) par le maître, en amont ou à la suite de cette première séance.

- Pour les assemblages de pièces

On peut demander aux élèves à quoi servent les encoches, ou le dire soi-même : « les pièces ont des encoches sur chaque côté, ce qui permet de les accrocher les unes aux autres ».

Phase de construction

- Travail sur la consigne :

Le maître annonce l'objectif principal de la situation.
« Chaque groupe de table va recevoir une boîte contenant les pièces que nous venons d'observer. Vous allez apprendre à utiliser ces pièces, et voir ce que l'on peut construire avec. »
La durée est précisée pour structurer l'activité au niveau du temps.
« Vous avez 10 minutes pour faire des constructions. »
Le maître annonce déjà qu'il y aura une mise en commun collective
« Gardez certaines d'entre elles, ne les détruisez pas toutes, car nous discuterons ensuite à partir de vos productions. »
Le maître peut avoir prévu une table sur laquelle les élèves viennent poser leurs constructions en prévision de la mise en commun.
Variante : « Vous venez déposer sur la table vos constructions au fur et à mesure, tous les élèves pourront ainsi observer toutes les productions, et nous pourrons en parler tous ensemble. »

- La tâche du maître durant ce moment de recherche

Aider les élèves sur les problèmes techniques d'assemblages.
Observer les productions des élèves afin d'anticiper sur les éléments qui pourront être dégagés lors de la mise en commun. Repérer des productions pertinentes pour l'analyse et s'assurer de leur conservation (non destruction).
Relancer l'activité des élèves, individuellement ou collectivement, en proposant à certains moments de s'arrêter et d'observer quelques productions.

- Procédures des élèves (synthèse sur celles anticipées et celles effectivement observées dans les classes)

Certains construisent des objets plans, d'autres des objets en volume.
Certains produisent des objets ouverts, d'autres fermés.
Beaucoup de cubes et de tétraèdres réguliers, quelques prismes, et d'autres objets de formes plus figuratives.
Les élèves utilisent d'ailleurs un vocabulaire figuratif : maison, boîte, village, église, chaise, lampe de poche, bateau, ... Le terme pyramide apparaît en CE1, mais nous ne pouvons vraiment savoir s'il s'agit d'une référence à l'objet géométrique, ou d'une référence culturelle.
Les élèves s'attachent beaucoup à l'aspect ludique.
Les élèves en difficultés pour l'assemblage des pièces ou la production d'un objet demandent conseil auprès d'autres élèves, observent leurs productions, s'inspirent des productions de leurs camarades.

- Difficultés et problèmes rencontrés par les élèves

- pour l'assemblage des pièces (aide du maître)
- pour trouver la pièce manquante afin de fermer un objet (difficulté pertinente)
- pour ne pas casser l'objet en assemblant une nouvelle pièce, ou la dernière (aide du maître)

Mise en commun

Autre moment dans l'activité à bien distinguer dans le rythme de la séance. Bien clore la phase de construction, demander clairement aux élèves d'arrêter les manipulations. Et attendre le calme pour lancer la mise en commun.

« Vous avez tous fait des constructions. Certaines se ressemblent et beaucoup sont différentes par certains aspects. Qu'est-ce que l'on pourrait noter comme différences ou ressemblances ? »

Le maître peut prendre en note au tableau les remarques des élèves. Cela permet de structurer la mise en commun, de renvoyer au groupe les remarques de chacun, de les mémoriser, pour ensuite les reprendre, les trier, les préciser ...

Attention à la position des objets quand on observe les constructions ; suivant le point de vue adopté, on peut voir un objet et le croire fermé alors qu'il est ouvert. Par exemple une pyramide sans fond posé sur la table. Il est donc important de manipuler les objets pour qu'ils soient vus par tous sous différents angles.

Les remarques des élèves portent généralement sur :

- les ressemblances à des objets familiers, du quotidien.
- les couleurs.
- les pièces utilisées pour la construction, nature et nombre.
- les objets ouverts, fermés, à plat, en volume.

Formulations utilisées par les élèves

- Sur la distinction plan/espace : « objet à plat », « c'est tout plat », « objets en volume », objet « en relief », « objet debout ».
- Sur la distinction ouvert/fermé : « C'est une boîte, c'est pas tout plat, c'est ouvert, on peut mettre quelque chose dedans. »
  Attention, ne pas identifier "ouvert" et "on peut mettre quelque chose dedans". En effet on peut aussi placer quelque chose *dans* un objet fermé creux. La capacité à contenir n'est pas un critère pertinent.
  « Là il y a un trou alors que dans l'autre il n'y en a pas. »
  « C'est tout fermé partout, il n'y a pas de trou. »
  Cela donne une idée juste de la différence ouvert/fermé. Les termes « ouvert » « fermé » sont finalement bien explicites.

Le terme « solide » peut être introduit pour désigner les objets fermés, en précisant que c'est un terme de géométrie. Dans le langage courant, et donc a priori pour les élèves, ce terme est souvent associé à « mou », ou opposé à « liquide ». Il est important de parler avec les élèves de ces différences.

- Sur l'usage des mots pour le plan et des mots pour l'espace
  Les élèves appellent carré un objet constitué de pièces carrées, triangle un objet constitué de pièces triangulaires... Il est important de distinguer auprès des élèves les pièces qui permettent de construire un objet et l'objet construit ; le nom des formes des faces, et le nom du solide.

Synthèse proposée pour cette séance

Pouvant être rédigée au tableau, sur une affiche ou sur le cahier.

La formulation dépend essentiellement des formulations utilisées par les élèves lors de la mise en commun et du travail fait collectivement. Ainsi la proposition suivante reste tout à fait virtuelle.

« Avec les pièces Polydrons, on peut construire :

- des objets tout plats, ou des objets en relief
- des objets ouverts ou des objets fermés.

Les objets fermés en relief s'appellent en géométrie "les solides". »

Fiche 2

Reproduction de solides avec le matériel Polydrons

Tâche des élèves

Les élèves ont un solide à disposition, fabriqué avec le matériel Polydrons. Ils doivent rédiger un bon de commande leur permettant d'obtenir les pièces nécessaires pour le reproduire.

Objectifs

- Etre capable d'observer et de décrire un solide
- Réinvestir et consolider le vocabulaire géométrique sur les solides et les polygones

Aspects mathématiques

- Description d'un solide à partir de ses faces : nature et nombre.
- Nommer ou représenter les divers polygones constituant les faces du solide

Présentation de la situation

- Travail sur la consigne

« Je vais distribuer un solide par groupe de deux élèves. Vous devez rédiger un bon de commande pour obtenir les pièces nécessaires pour reproduire le solide.
Lorsque vous avez indiqué ce qu'il vous faut, vous venez me voir, et je vous fournirai ce que vous demandez sur votre bon de commande. Ensuite avec les pièces que vous aurez reçues, vous reconstruirez le solide. »

Sur le type d'écrit, laisser libre choix pour l'utilisation du texte ou de figures. A un élève qui demande s'il faut écrire ou dessiner le maître peut répondre « comme tu veux, tu utilises ce qui te parait le mieux adapté, le plus clair ».

Il est aussi important de parler de la validation au moment de la présentation de la situation et de ce qui s'ensuit. Ainsi le maître peut préciser :
« Si la construction du solide convient vous écrivez sur votre bon de commande « nous avons construit le même solide » et vous tirez un trait de séparation. Vous pourrez alors venir chercher un autre solide et refaire l'activité.
Si vous rencontrez des difficultés, ou bien s'il vous manque des pièces, ou si vous avez tout autre problème, vous écrivez sur votre bon ce qui ne va pas, et complétez ou rédigez un autre bon de commande. »

- *Une variable didactique importante : le choix des solides.*

Le comportement des élèves varie selon que le solide est constitué de peu de faces ou d'un nombre élevé de faces, de même si les faces sont des polygones rapides à identifier (carré, triangle) ou des polygones moins fréquemment rencontrés (pentagone, hexagone, ...).
Le type de solide a une influence sur la complexité de la tâche.

Conséquence sur la mise en œuvre

Cette considération a une influence sur le choix de l'organisation du travail. En effet il est important dans un premier temps que les élèves comprennent la situation, et le sens de la rédaction d'un bon de commande. Ainsi les solides proposés au début ne doivent pas poser trop de problèmes pour la description.
Par contre, comme la description de solide est l'objectif principal de la situation, il est nécessaire pour les autres essais de proposer des solides plus complexes.
Le maître peut choisir de laisser les élèves s'organiser eux-mêmes : après le premier essai réussi, les élèves vont eux-mêmes chercher un solide à reproduire. Cela permet à chacun de définir la complexité à laquelle il veut se confronter, et permet à chacun d'aller à son rythme.
Le maître prévoit donc un certain temps de recherche (environ quinze ou vingt minutes) durant lequel certains groupes auront peut-être reproduit un seul solide, et d'autres plusieurs.

- <u>un aide-mémoire</u>

La présence dans la classe d'une affiche sur laquelle sont représentés et nommés les différents polygones qui interviennent est nécessaire pour des élèves qui viennent de découvrir ces formes. L'affiche constitue un aide-mémoire au vocabulaire et aux représentations. C'est aussi une façon de se les approprier.
Si par contre on se trouve dans des plus grandes classes, si on veut évaluer l'acquisition et la maîtrise de ce vocabulaire, alors l'affiche sera retirée.

- <u>Rôle du maître</u>

Fournir aux élèves les pièces commandées. Penser à organiser les pièces selon leur forme dans des boîtes différentes pour faciliter la distribution.
Il est très important de ne pas intervenir sur les bons de commande et de donner exactement ce qui est demandé. Par exemple pour reproduire un cube, des élèves peuvent noter sur leur bon de commande « carré ». Le maître donne alors un carré. On peut s'attendre à ce que les élèves protestent, c'est alors qu'il faut repréciser que vous donnez exactement ce qui est demandé par écrit.
C'est aux élèves de prendre conscience du manque d'information ou de précision, ce n'est pas au maître de le dire. Cela a beaucoup plus de poids si ce sont les élèves eux-mêmes qui sont amenés à le formuler.

L'aide du maître ne peut porter sur la rédaction des bons de commande puisque la description (forme et contenu) est l'objectif principal de la situation. Il ferait alors le travail à la place de l'élève.

Si les dessins de polygones sont trop imprécis, entraînant une impossibilité de lecture, la réponse du maître est qu'il ne fournit aucune pièce, puisqu'il ne peut pas lire le bon de commande.

Certains élèves en apportant leur commande vont aussi la formuler oralement, bien que cela ne soit pas nécessaire (ni demandé). Parfois il peut y avoir des décalages avec ce qui est écrit. Il est important, car c'est la consigne, de ne tenir compte que du bon de commande.

Procédures et bons de commande des élèves

- Les élèves repèrent les différentes natures des faces puis, pour chacune, les dénombrent (ou bien au fur et à mesure).
- Difficulté à dénombrer les faces de même nature, quand elles sont nombreuses. Il faut bien repérer une face origine, faire tourner, pivoter, sans recompter une face, ... Les pièces étant en plastique, les élèves peuvent exceptionnellement dans ce cas mettre un indice au feutre sur chaque face déjà comptée, utiliser des gommettes, ou autre ...
- Le pentagone a parfois posé des difficultés pour sa représentation. Il semble plus judicieux de renvoyer l'élève à une observation fine de l'affiche (aide-mémoire) que de lui fournir une pièce pentagonale pour qu'il repasse le contour. Dans ce dernier cas il développe peu de compétences.

Différents types de bons de commande apparaissent dans les productions des élèves. Dans ceux que nous avons observés, ils contiennent comme indications :

- le nombre total de faces, sans préciser la nature ;
- ou le nombre de faces de chaque nature, sans préciser la nature ;
- ou le nombre de faces et la nature des faces

Les nombres sont écrits en chiffres, ou en lettres, ou par la représentation de la face en ce même nombre d'exemplaires. La nature des faces est indiquée ou bien par le nom du polygone ou bien par une figure.

En prolongement de cette situation, on peut proposer l'activité *Reproduction de solides, le jeu du sac.* (fiche 3)

Mise en commun et synthèse proposée

La mise en commun porte sur la réussite ou non des élèves, les difficultés rencontrées, les différents types de bons de commande rédigés, et ce qu'il faut y inscrire pour obtenir toutes les pièces. Donc, deux aspects sont à dégager dans la synthèse :

- la situation de rédaction d'un bon de commande, situation générale et non spécifique à la reproduction de solide.
- l'aspect mathématique : description d'un solide.

Voici une proposition de synthèse :

« Lorsqu'on rédige un bon de commande pour quelqu'un, on doit être précis et clair, et écrire ou dessiner toutes les informations utiles et nécessaires. »

« Pour décrire un solide, afin de le reproduire, on doit indiquer le nombre de faces du solide et la nature (ou la forme géométrique) de ces faces. »

Fiche 3

Reproduction de solides, le jeu du sac

Les élèves ont un solide à disposition, ils doivent le reproduire en rédigeant un bon de commande ; mais le solide n'est plus visible ; il se trouve dans un sac opaque, fermé, qu'ils ne pourront ouvrir que pour valider leur travail.

Objectifs

- Etre capable d'observer et de décrire un solide
- Réinvestir et consolider le vocabulaire géométrique sur les solides et les polygones

Aspects mathématiques

- Description d'un solide à partir des ses faces : nature et nombre.
- Nommer ou représenter les divers polygones constituant les faces du solide

Formulation possible pour la consigne :

« Je vais distribuer un sac contenant un solide, par groupe de deux élèves. Vous devez rédiger un bon de commande pour obtenir les pièces nécessaires pour reproduire le solide. Vous ne devez pas ouvrir le sac pendant la recherche.
Lorsque vous avez indiqué ce qu'il vous faut, vous venez me voir, et je vous fournirais ce que vous demandez sur votre bon de commande. Ensuite avec les pièces que vous aurez, vous reconstruisez le solide. C'est seulement lorsque vous êtes sûr de votre construction que vous pourrez ouvrir le sac pour vérifier si votre construction est correcte. »

Les objectifs et aspects mathématiques pour cette activité sont les mêmes que l'activité *Reproduction de solides avec le matériel Polydrons* (fiche 2). Seules les compétences à mettre en œuvre pour la description ne sont pas de même nature. C'est le toucher et non plus la vue qui fournit les informations.
Les remarques faites pour la situation *Reproduction de solides...* concernant le reste de la consigne, le choix des solides, l'aide-mémoire, le rôle du maître, valent pour cette situation. Nous vous y renvoyons.

Intérêts par rapport à la situation « Reproduction de solides (visibles) »

- Accentuer le caractère ludique. Il est plus mystérieux et engageant de reproduire un objet que l'on ne voit pas. Effet de surprise ou d'étonnement au moment de l'ouverture du sac.
- La difficulté à repérer la position des faces les unes par rapport aux autres est plus grande, et incite plus ou moins à se représenter le solide mentalement.

- Le repérage de la forme d'un polygone par le dénombrement de ses côtés est plus explicite. Il est assez facile de distinguer à vue un pentagone d'un hexagone, par exemple. Au toucher c'est beaucoup plus délicat. De même pour distinguer un carré d'un losange, le repérage d'angle droit est nécessaire. Ainsi en fixant convenablement la variable « nature des faces », on accentue le travail sur les polygones.
- Une face constituée de plusieurs pièces pose problème. Pour exemples : un trapèze isocèle peut se construire avec trois triangles équilatéraux ; une face rectangulaire, avec deux carrés ; un losange, avec deux triangles équilatéraux, ... Or par le toucher, les élèves ne repèrent que la forme de la face et doivent ainsi faire des hypothèses sur les pièces permettant sa construction.

  Les élèves sont alors face à un problème les mettant dans une situation de recherche tout à fait intéressante.

  D'autre part cela permet de préciser la notion de face d'un solide, et de distinguer les faces, des pièces Polydrons qui servent à les construire. Le point de vue géométrique se distingue ainsi du point de vue pratique.

Fiche 4

Mises à plat de solides,
construits avec le matériel Polydrons

Objectifs

- Introduire le terme « patron » à la suite d'une activité dans laquelle une définition aura pris du sens pour les élèves : « un patron est une représentation à plat du solide en un seul morceau qui permet en le repliant d'obtenir le solide. »
- Mettre en évidence à partir des diverses productions des élèves qu'un solide admet plusieurs patrons

Présentation de la tâche

Chaque élève dispose d'un solide (donné par le maître ou construit par les élèves dans une première phase, ou lors d'une activité précédente).
« Vous devez déplier le solide de façon à mettre toutes les faces à plat mais en les laissant attachées les unes aux autres. On doit pouvoir reconstruire le solide à partir de ce morceau à plat. »
« Pour garder une trace du morceau que vous obtenez à plat je vous donne une feuille sur laquelle vous repassez son contour, avec un feutre noir. On affichera ensuite au tableau les différentes traces que vous avez obtenues, pour en discuter. »
Il est important dans cette situation que *une seule* face du solide soit construite avec *une* seule pièce Polydron. Sinon on peut déplier le solide en un seul morceau sans que celui-ci ne soit un patron.

Remarques

Les élèves ont tendance au début à démonter le solide complètement en séparant toutes les faces. Puis ils les assemblent ensuite à plat. C'est pourquoi il est important de préciser dans la consigne (qui peut être écrite au tableau) que *le morceau à plat doit redonner le solide quand on le replie*. C'est un moyen de validation pour les élèves.

Rôle du maître :

Rappeler les contraintes indiquées dans la consigne et solliciter les élèves pour qu'ils valident leur mise à plat en "remontant le solide".
Refaire le solide initial ou en proposer un autre exemplaire lorsqu'un élève éparpille toutes les pièces, et semble perdu du fait qu'il n'a plus de repère sur le solide.

Remarques sur les traces écrites demandées

Lorsque les élèves repassent le contour du “morceau à plat”, ils n'obtiennent pas de figures géométriques puisque les encoches, les trous pour l'assemblage des pièces apparaissent sur leurs dessins. Mais cela est peu important pour le moment. Il s'agit de privilégier la notion de patron, la cohérence entre le morceau à plat et la montée en volume donnant le solide.

Si le maître demande de *reproduire* sur une feuille le “morceau à plat”, on peut s'attendre à des tracés corrects pour les relations d'incidence (faces adjacentes) mais approximatifs pour la forme des faces ; des carrés pas tout à fait carrés, des carrés de différentes tailles, pour le cube par exemple. La situation ne permet pas vraiment une prise de conscience par les élèves des contraintes à respecter. La tâche de l'élève se trouve déplacée vers une tâche de reproduction de figures planes, ce qui n'est pas l'objectif recherché par la situation, et risque d'éloigner les élèves des objectifs premiers visés. Ainsi cette demande de *reproduction* n'est pas pertinente dans le cadre des objectifs annoncés ici.

Mise en commun

Afficher les représentations en les classant par solide. Cela permettra pour la suite de dégager le fait qu'un solide admet plusieurs patrons.
Attention, il n'est pas judicieux de demander aux élèves de retrouver le solide correspondant à une représentation. C'est une tout autre tâche, donc une autre situation. Ainsi l'organisation du classement des patrons en fonction du solide initial doit être prise en charge par le maître.

Synthèse proposée :

- « Un développement à plat d'un solide, en un seul morceau, et qui permet de reconstituer le solide, est appelé un patron du solide. »
- « Un solide peut avoir plusieurs patrons. »

Fiche 5

Reconnaître si une représentation plane est ou non le patron d'un solide

Présentation de la tâche des élèves

Les élèves disposent d'une grande feuille format A3 sur laquelle figurent des représentations planes "de type patrons" (voir appendice). Il s'agit pour les élèves de préciser celles qui sont de vrais patrons de solides (qui permettent de reconstruire le solide, en pliant suivant les segments), de celles qui ne sont pas des patrons de solides.

Dans une première étape les élèves disposent du matériel Polydrons pour faire les constructions à plat et les monter en volume. Ainsi leurs réponses se construisent à partir de manipulations effectives.

Dans une seconde étape, les élèves doivent se prononcer dans un premier temps sur les réponses sans disposer de matériel, sans pouvoir effectuer aucune manipulation. Le matériel Polydrons n'est fourni que dans un second temps, pour la validation des propositions.

Objectifs

- de l'articulation des deux étapes

L'objectif principal de ces situations, qui ne peut se développer que sur le long terme, en articulation de l'une et de l'autre, est de faire acquérir aux élèves une expérience, une familiarité avec des déplacements et des objets dans l'espace, en articulant expérience effective et expérience mentale. On pourrait dire : « appendre à voir et manipuler dans sa tête ».

La seconde étape instaure dans sa consigne cette nécessité de construire des images dans sa tête. La première étape est nécessaire pour comprendre la situation, et pour répondre à une hypothèse forte de travail : les images mentales d'objets ou d'actions, se construisent et se structurent de façon analogique aux actions effectives. Une condition nécessaire (mais sûrement non suffisante) est que la familiarité avec la situation effective permet et participe à l'élaboration de sa construction mentale.

- objectifs communs aux deux situations

Prendre conscience qu'un développement à plat en un seul morceau n'est pas nécessairement le patron d'un solide.

Mettre en évidence des conditions nécessaires (mais non suffisantes) pour qu'une représentation plane de type patron soit le patron d'un solide :

- même nombre de faces
- même nature de face
- les faces sont positionnées les unes par rapport aux autres d'une certaine façon

Première étape : avec manipulation pour élaborer une réponse

Présentation

Le maître affiche au tableau une copie grand format de la feuille qui sera distribuée aux élèves. Sur cette feuille figurent des représentations "de type patrons" qui sont effectivement des patrons de solides et d'autres non bien que très proches.
« Chacun va recevoir une feuille comme celle affichée au tableau, sur laquelle sont représentées différentes figures. Parmi ces figures il y en a qui sont des patrons de solides et d'autres non. Vous devez indiquer pour chacune d'elle si c'est le patron d'un solide ou si ce n'est pas le patron d'un solide.
Pour vous aider vous allez recevoir une boîte contenant les pièces Polydrons. Vous pouvez reproduire une figure avec les pièces, puis observer si cela permet d'obtenir un solide ou non.
Vous écrirez sur votre feuille sous la figure "c'est le patron d'un solide" ou "ce n'est pas le patron d'un solide".

Il est important de faire reformuler la consigne par les élèves.
Dans une classe de CE2, un élève a proposé « On fait les mêmes formes que sur la feuille avec les pièces. Ça doit être des cubes, des pavés, ou d'autres solides. Et il y en a qui ne correspondent pas à des cubes, des pavés, et des solides. »

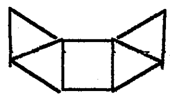
Vous pouvez ajouter dans la consigne que lorsqu'une figure est le patron d'un solide, les élèves peuvent écrire le nom du solide correspondant. Cependant attention, l'objectif de la situation ne porte pas sur la reconnaissance de solides, ni sur le fait de savoir les nommer. De plus vous pouvez proposer des figures qui sont des patrons de solides que les enfants ne connaissent pas. Ainsi dire le nom du solide quand on le connaît n'est qu'un "plus". Il peut y avoir dans la classe une affiche avec quelques solides étudiés auparavant collés et nommés. Mais ce n'est en aucun cas une exigence de la situation. L'objectif est de repérer si une figure plane est un patron de solide ou non.

Remarques sur le travail des élèves

Cette situation pose peu de difficultés aux élèves, une fois la consigne bien comprise. Ils s'engagent généralement bien et avec plaisir dans cette tâche.
Quelques erreurs produites par les élèves :

- Utiliser les bonnes pièces en nombre exact mais les disposer différemment que sur la figure.

Par exemple pour la figure suivante une élève a repéré le carré et les quatre triangles équilatéraux, puis a construit avec ces pièces une pyramide à base carrée. Or la figure fournie n'est pas le patron d'une pyramide à base carrée.



Il se dégage ici un aspect important en liaison avec la notion de patron, qui pourra être repris dans la synthèse : une figure constituée des mêmes pièces que les faces d'un solide, n'est pas forcément un patron du solide. Car il faut aussi que ces pièces soient *disposées d'une certaine façon les unes par rapport aux autres.*

Pour les autres erreurs on trouve :
- Oubli d'une pièce
- Confusion entre deux pièces. Par exemple une figure contenant un carré orienté de telle sorte que l'élève lui associe une pièce losange non carré. Ou bien confusion hexagone, pentagone, ...

<u>La mise en commun</u>

Pour chacune des figures, le maître peut avoir prévu les assemblages correspondant aux figures, et demander à un élève de venir faire la manipulation au tableau pour une validation collective des résultats. Cela permet aussi pour les autres élèves de se décentrer par rapport à l'action, de "voir extérieurement" le passage du plan à l'espace.
Pour chaque figure un élève donne sa réponse, la validation collective est faite, et le maître écrit sur la grande feuille collée au tableau « ce n'est pas le patron d'un solide » ou « c'est le patron d'un solide ».
Pour le second cas le maître peut demander aux élèves de nommer le solide s'ils le connaissent, ou bien il indique lui-même le nom du solide que les élèves peuvent aussi noter.

Il est important pour les figures qui ne sont pas des patrons de solides de demander aux élèves de donner des arguments qui permettent d'expliquer ce fait. Bien évidemment on ne pourra qu'être sommaire, mais préciser cependant déjà quelques conditions nécessaires : attention ce qui peut être dégagé dépend des figures proposées aux élèves, qui permettent ou non de proposer ces précisions.
- un patron de solide doit être formé du même nombre de faces que le solide.
- un patron de solide doit avoir les faces de même nature que le solide.
- dans un patron de solide les faces sont placées d'une certaine façon les unes par rapport aux autres, pour permettre de reconstituer le solide.

<u>Synthèse :</u>

Elle reprend les différents points cités précédemment. Il ne faut pas trop tôt institutionnaliser ces remarques. C'est en effet à la suite de plusieurs reprises de cette situation, au cours desquelles ces remarques auront été formulées par les élèves oralement qu'il s'agira de les mettre par écrit, en tenant compte bien sûr des formulations proposées par les élèves.
La deuxième situation, détaillée ci-après, permet encore de faire ces remarques, de leur donner plus de sens, car elles sont un outil pour déterminer *sans manipulation* qu'une figure n'est pas le patron d'un solide. Cependant elles ne permettent pas d'être certain qu'une figure est le patron d'un solide.

Deuxième étape : agir dans sa tête, la manipulation sert uniquement à la validation

Présentation

Le maître affiche une feuille grand format au tableau, sur laquelle figurent les différentes représentations. Il fait référence à la situation précédente déjà vécue par les élèves et demande de repréciser de quoi il s'agit, quelle était la tâche, la consigne, ...
Il annonce ensuite : « Nous allons reprendre cette situation, vous allez recevoir cette feuille, et vous devez indiquer les figures qui sont des patrons de solides et celles qui n'en sont pas. MAIS, cette fois-ci, vous ne disposez plus des pièces pour faire les constructions. Vous devez réfléchir, imaginer, faire les constructions dans votre tête. »
« Quand vous aurez fini vous indiquerez au stylo (et pas au crayon à papier) pour chaque figure "c'est le patron d'un solide" ou "ce n'est pas le patron d'un solide", je noterai au tableau les différentes réponses que vous aurez faites, puis je vous distribuerai les pièces des Polydrons, vous ferez les constructions et vous pourrez vous corriger vous-même. »
« Ensuite nous réfléchirons ensemble aux différentes erreurs qui ont été faites, cela nous permettra de dégager certains points importants pour comprendre ce qu'est un patron de solide. »

- statut de l'erreur

Le fait de noter au tableau les réponses des élèves, permet, avant qu'ils ne vérifient, de dépersonnaliser les erreurs faites. En effet ce n'est pas untel ou untel qui a fait telle erreur qui nous intéresse, mais bien telle erreur. Si le maître demandait à la fin, lors de la mise en commun, quelles sont les erreurs commises, les élèves peuvent se sentir mal à l'aise, ils n'ont pas nécessairement conscience de l'effet moteur d'une erreur, et du fait que cette situation est efficace en partie par les erreurs qu'elle induit.

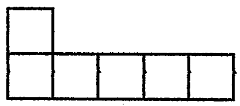
- *Une variable didactique importante : le choix des représentations proposées.*

Il est nécessaire de choisir des figures qui génèrent des confusions sans toutefois qu'elles ne soient trop complexes à la lecture.
On peut proposer des patrons du cube, du tétraèdre régulier, de la pyramide à base carrée, du prisme à base triangulaire ; mais il faut choisir aussi d'autres solides : des prismes de bases différentes, des pyramides de bases différentes ...
Pour construire des représentations "de type patrons" qui ne sont pas des patrons mais en sont proches, il suffit de partir d'un vrai patron et de retirer ou adjoindre une face, ou bien de déplacer une ou plusieurs faces de façon à ne plus avoir un patron.

Mise en commun

Après le moment de validation individuelle, le maître indique au tableau sous la dictée des élèves les réponses correctes pour chaque figure.
La situation et ses variables sont fixées pour qu'il y ait un nombre non négligeable d'erreurs pour une même figure. C'est alors qu'il faut préciser avec les élèves que c'est une erreur courante, et comprendre « comment se fait-il que l'on soit si nombreux à faire cette erreur ? ».
Cela engage la discussion sur les indices pris en considération dans la figure, et ceux non pris en considération.

Par exemple dans une classe de CE2, à peu près la moitié des élèves avaient annoncé que la représentation suivante est le patron d'un cube.
Comprendre et analyser cette erreur c'est pouvoir dire :



> « Cette figure a bien six faces, carrées, comme un cube. C'est peut-être pour cela qu'on l'a prise pour le patron d'un cube. Or nous avons vérifié en manipulant les pièces Polydrons, ce n'est pas le patron d'un cube. Pourquoi ? Les différentes faces ne sont pas situées au bon endroit pour pouvoir reconstruire un cube. Pour savoir si une représentation est le patron d'un cube, il faut faire attention à la position des faces les unes par rapport aux autres. »

Il est nécessaire que ce soient les élèves qui explicitent et formulent ces divers arguments. Le maître doit aider à cette formulation sans l'induire.

Synthèse

Elle doit se rédiger à partir du vocabulaire et des formulations utilisées par les élèves.
Voici une proposition (virtuelle) :

« Pour savoir à peu près si une représentation plane est le patron d'un solide, il faut faire attention :

- au nombre de faces qui constituent la figure
- à la nature de ces faces
- à la position des faces les unes par rapport au autres. »

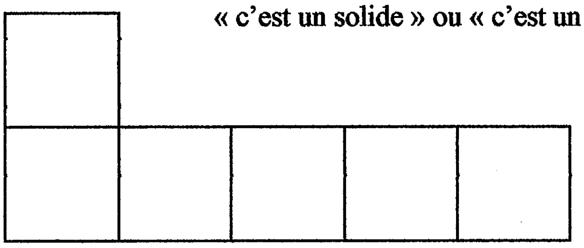
Résumé de la structure du déroulement de la séance

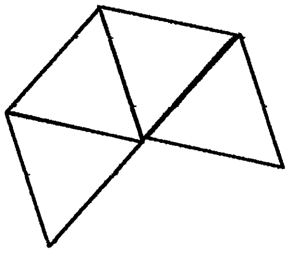
- Présentation, consigne
- Recherche individuelle sans matériel
- Recenser collectivement au tableau pour chaque figure le nombre d'élèves affirmant "c'est le patron d'un solide" et le nombre d'élèves affirmant "ce n'est pas le patron d'un solide".
- Validation individuelle avec le matériel.
- Mise en commun, discussion autour des erreurs
- Synthèse

Appendice : Représentations proposées dans une classe de CE2

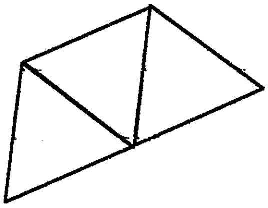
(20 productions d'élèves pour les réponses d'anticipation, sans matériel)

11 élèves annoncent « c'est un pavé » ou « c'est un solide » ou « c'est un cube »

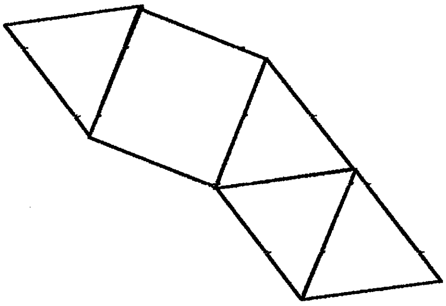




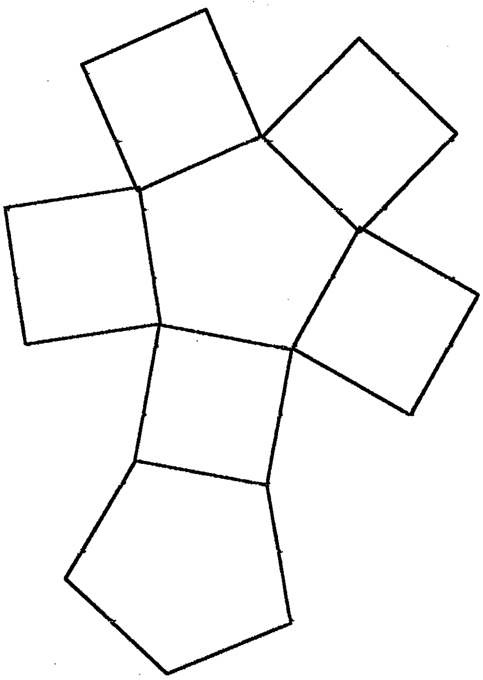
4 non-réponse
1 élève note « un triangle »
3 autres « pyramide » ou
« pyramide à base triangulaire »



2 non-réponse
3 élèves proposent « solide » ou « pyramide »

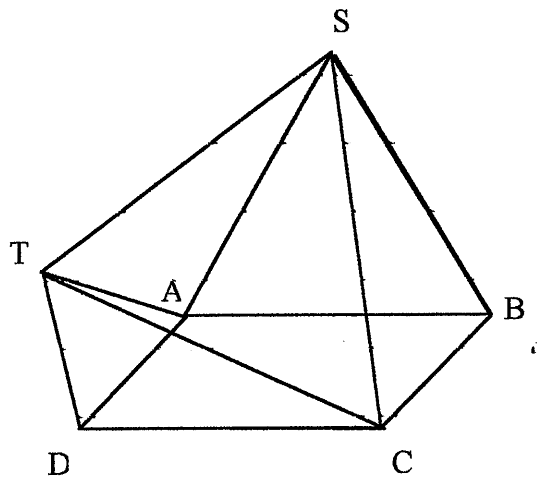


12 élèves affirment que c'est le patron d'un solide.
Parmi eux, 6 indiquent « pyramide à base carrée »,
2 « pyramide », 3 « solide », et 1 « prisme ».



Toutes les réponses sont correctes

Soit ABCD un parallélogramme. ASB et ATD sont deux triangles équilatéraux situés à l'extérieur du parallélogramme. Démontrer que le triangle STC est un triangle équilatéral.



Afin d'éviter les répétitions et lourdeurs de la rédaction, précisons en préalable les données du problème avec les conséquences sur les propriétés géométriques en jeu. Nous ne les rappellerons pas en justification dans la suite.
ABCD parallélogramme fournit : AB = DC et AD = BC ; $\widehat{ABC} = \widehat{CDA}$ et $\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$; deux angles consécutifs du parallélogramme sont supplémentaires.
SAB et TAD sont des triangles équilatéraux donc leurs angles sont égaux (et égaux à 60°) ; les longueurs SA, SB, et AB sont égales ; les longueurs TA, TD et DA sont égales.

Démonstrations utilisant les cas d'égalité des triangles

Nous utilisons la propriété suivante : « Deux triangles ayant deux côtés de même longueur, et même angle formé par ces deux cotés respectivement, sont isométriques. »

Montrons que SBC et CDT sont isométriques :
SB = AB et AB = DC d'où SB = DC
BC = AD et AD = DT d'où BC = DT
$\widehat{CBS} = \widehat{CBA} + \widehat{ABS}$ terme qui équivaut à $\widehat{ADC} + \widehat{TDA}$, d'où $\widehat{CBS} = \widehat{TDC}$
Ainsi les triangles SBC et CDT sont isométriques, et on en déduit : **SC = CT**

Montrons que SBC et SAT sont isométriques :
SB = SA
BC = AD et AD = TA d'où BC = TA

$\widehat{CBS} = \widehat{CBA} + \widehat{ABS}$; $\widehat{TAS} = 360 - 60 - 60 - \widehat{DAB}$
$\widehat{DAB} = 180 - CBA$; $\widehat{TAS} = \widehat{CBA} + 60$; $\widehat{TAS} = \widehat{CBA} + \widehat{ABS}$; d'où $\widehat{CBS} = \widehat{TAS}$
Ainsi les triangles SBC et SAT sont isométriques, et on en déduit : **SC = ST**

[SC], [ST] et [CT] sont de même longueur, donc le triangle SCT est équilatéral.

On peut aussi montrer seulement l'isométrie de deux des triangles précédents pour montrer que STC est isocèle, puis faire un calcul d'angles pour montrer qu'il a un angle de 60°. C'est l'objet des deux variantes.

<u>Variante 1</u> :
Les triangles SBC et CDT sont isométriques (voir ci-dessus)
$\widehat{DCT} + \widehat{TCS} + \widehat{SCB} + \widehat{CBA} = 180°$ (somme des angles consécutifs d'un parallélogramme)
$\widehat{SCB} + \widehat{CBS} + \widehat{BSC} = 180°$ (somme des angles d'un triangle).
$\widehat{BSC} = \widehat{DCT}$ (par isométrie des triangles) et $\widehat{CBS} = \widehat{CBA} + \widehat{ABS}$ donc $\widehat{TCS} = \widehat{ABS} = 60°$

<u>Variante 2</u> :
Les triangles SAT et SBC sont isométriques (voir ci-dessus, nécessite un calcul d'angles)
$\widehat{TSC} = \widehat{TSB} - \widehat{CSB} = \widehat{TSB} - \widehat{TSA}$ (puisque TSA = CSB par isométrie des triangles)
donc $\widehat{TSC} = \widehat{ASB} = 60°$.
(Ceci permet d'ailleurs de démontrer que SBC se déduit de SAT par une rotation de centre S et d'angle 60°.)

<u>Démonstrations utilisant des transformations</u>

<u>Démonstration 1 (figure 1)</u>
Considérons la rotation de centre T et d'angle 60°.
Montrons que S est l'image de C par cette rotation.
D a pour image A par la rotation.
L'image de la demi-droite [DC) a pour origine A et fait un angle de 60° avec [DC), ou encore [AB), puisque (DC) et (AB) sont parallèles. Par unicité de cette demi-droite, et compte tenu que ABS est un triangle équilatéral, on obtient que **[AS) est l'image de [DC) par la rotation.**
D'autre part, DC = AB et AB = AS, d'où **DC = AS**.

On conclut des deux affirmations précédentes que **S est l'image de C par la rotation de centre T et d'angle 60° ; donc le triangle TCS est équilatéral.**

Démonstration 2 (figure 2)

Soit r la rotation de centre A et d'angle 60° et t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

La composée d'une translation et d'une rotation est une rotation de même angle. Donc t o r est une rotation d'angle 60°. D'autre part t o r (A) = B.

Le triangle SAB est équilatéral, donc par unicité de la transformation précédente, **t o r est la rotation de centre S et d'angle 60°. Puisque t o r (T) = C, alors le triangle STC est équilatéral.**

Figure 1

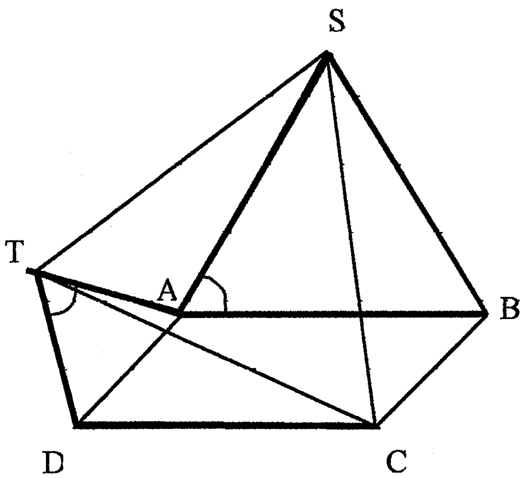
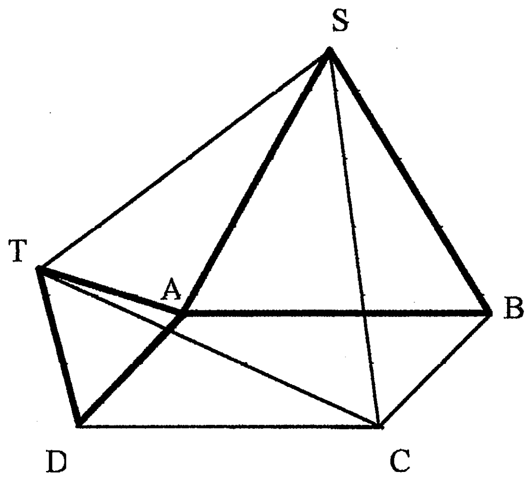


Figure 2

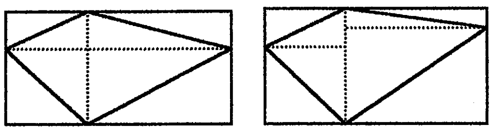


Un problème d'aire pour le partage d'un rectangle
Quelques figures pour des cas de figures

On considère quatre points situés chacun sur un des quatre côtés d'un rectangle (et différents des sommets du rectangle). Quand on relie ces quatre points, on obtient un quadrilatère. Le problème est de comparer l'aire de ce quadrilatère, et l'aire de l'ensemble des quatre parties qui entourent le quadrilatère à l'intérieur du rectangle.

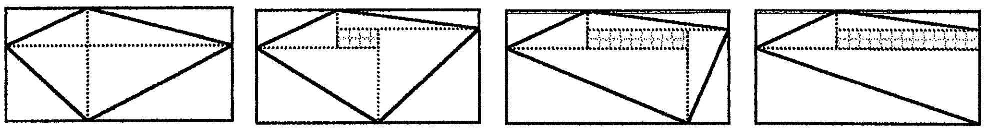
Pour simplifier la rédaction, nous noterons Q l'aire du quadrilatère considéré, et P l'aire de la partie restante du rectangle. Il s'agit de comparer Q et P. Lorsque deux points seront situés sur deux côtés opposés, formant un segment parallèle à des bords du rectangle, nous appellerons cette position « face à face », pour des commodités de langage. D'autre part nous ne détaillons pas les démonstrations, laissant les figures suggérer au lecteur les justifications sous-jacentes aux affirmations.

- Cas où deux points sont « face à face »
  Que les deux autres points soient ou non également « face à face », on a égalité Q =P

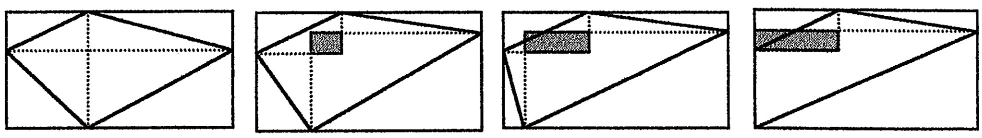


- Cas où aucun des points ne sont « face à face »
  Nous avons fixé trois des points et fait varier le quatrième à partir de la position « face à face », dans un sens et dans l'autre vers les positions limites des sommets du rectangle

  - Variation dans le sens précisé par les figures suivantes : on a toujours Q > P



  - Variation dans l'autre sens : on a toujours Q < P



La région grisée est comptée en double quand on reporte les triangles extérieurs sur l'intérieur du polygone.

REPRESENTATIONS EN PERSPECTIVES

Collections étudiées du CP au CM2 : Nouvel objectif Calcul, Hatier (noté noc) ; Diagonale, Nathan (noté diag); J'apprends les maths, Retz (noté jam) ; et le manuel Déclic 95 chez Bordas 6ème (mis en italique)
Indications pour les abréviations utilisées : PC : perspective cavalière ; PA : perspective axonométrique ; Rés. PB : en résolution de problème ; RP : représentation plane.

Années de parution des manuels :
Nouvel Objectif Calcul, Hatier, CP 1997, CE1 1998, CE2 et CM1 1995, CM2 1996 ;
Diagonale, Nathan, CP 1995, CE1 1992, CE2 1995, CM1 1996, CM2 1994 ;
J'apprends les maths, Retz, CP 1991, CE1 1992, CE2 1996, CM1 1998, CM2 2000.

Reconnaître

Reconnaître une représentation en perspective d'un solide, parmi un ensemble de représentations en perspective de divers solides

Polyèdre ou non polyèdre	PC et PA faces ombrées + emballages	noc CE1, p57
	PC	noc CE2, p46
Cube	PC et PA neutre et pointillés	noc CE2, p145
Pyramides	PC et PA pointillés	noc CM2, p186
Solides qui roulent	PC pointillés, couleur + emballages	diag CE1, p65

Construire

Construire une représentation en perspective d'un solide

Emballage 6 briques	Texte + dessin	noc CM2, p183
Assemblages de cubes	PC 3 couleurs	diag CM1, p25
Cube	PC papier cahier, 2 couleurs	diag CM1, p24
Cube de dimensions imposées	*PC avec convention angle et rapport précisée*	*bordas 6, p240*

Reproduire une représentation en perspective

Solides usuels	PC 1 couleur et uni : à faire sur papier pointé mailles carrées	noc CM1, p145
	PC 3 couleurs et uni : à faire sur papier pointé à mailles triangulaires	noc CM2, p180
Solides non usuels	PC papier cahier : à faire sur papier cahier	diag CM1, p25
	PC papier cahier 3 couleurs : à faire sur papier cahier	diag CM2, p152
Assemblages de cubes	*PC quadrillage : à faire sur papier cahier*	*bordas 6, p240*

Compléter une représentation en perspective

Compléter un dessin par des arêtes manquantes pour obtenir une représentation en perspective

Cube	PC sur papier pointé à mailles carrées	noc CE2, p144
Pavés	*PC quadrillage (arêtes cachées ou visibles)*	*bordas 6, p238*

Indiquer les arêtes cachées par des pointillés dans des représentations en perspective (et éventuellement les sommets cachés à marquer)

Solides non usuels	PC sur papier cahier, sommets marqués,	diag CM1, p25

	convention précisée	
	PC sur papier cahier, sommets marqués, convention non précisée, à formuler	diag CM2, p152
Solides non usuels	*PC sur quadrillage*	*bordas 6, p236*
	PC sur quadrillage	*bordas 6, p240*

Compléter une représentation en perspective par un motif sur une face (ou plusieurs)

Quadrillage sur cube + dessin	PA quadrillage sur une face	diag CM1, p76
Figure géométrique sur cube	*PC dessin sur une face*	*bordas 6, p242*

Décrire

Indiquer le nombre de ....

... faces, arêtes, sommets (les uns et / ou les autres)

Cube	PC neutre	noc CE1, p57
Pyramide à base carrée	PC pointillés colorés + Emballages	diag CE1, p65
Solides usuels	PC et PA pointillés couleur	diag CE2, p15
Solides usuels	PC pointillés 2 couleurs + noms des solides	jam CE1, p91
Deltaèdres	Objets construits + PA couleurs	jam CE2, p136
Tétraèdre	PA pointillés, 2 couleurs, ombré	jam CM1, p72
Prisme à base triangulaire	PC pointillés, 2 couleurs, ombré	jam CM1, p74
Prisme à base triangulaire	*PC sur quadrillage*	*bordas 6, p240*

... faces, arêtes, sommets, avec question sur la nature des faces

Solides usuels	PC et PA pointillés	noc CM1, p145

... cubes constituants un assemblage

PC	noc CE2, p144
PC 3 couleurs	diag CE1, p81
PC 3 couleurs	diag CM1, p25
PC couleurs + vue dessus	diag CM2, p140
PC	*bordas 6, p239*

... solides dans un solide

Pyramides dans un cube	PC pointillés, diagonales en pointillés, 2 couleurs	diag CM2, p153

Nommer

Chemins sur les arêtes d'un cube	PC pointillés + noms des sommets	noc CE2, p145
Faces et nature des faces	PC 3 couleurs d'un pavé, pointillés, + noms	diag CM1, p93
Pavés et solides usuels	PC pointillés	jam CM2, p115
Sommets pour un même sommet sur patron	*PC pavé pointillés + noms des sommets*	*bordas 6, p237*

Autres

Orienter différemment une RP sur papier pointé	noc CM2, p180
Distorsions d'une écriture suivant un quadrillage sur cube (PA)	diag CM1, p76
Effectuer des mesures (aires ; patrons, et PC pointillés)	*Bordas 6, p237*

VUES et POINTS DE VUE

Remarque sur le vocabulaire : le mot « vue » désigne « une façon de voir » l'objet ; si c'est une vue au sens du dessin technique, je précise « vue DT ».

Préciser le point de vue	Dessins d'objets sur une table ; dessins d'une maison	noc CE1, p58,59
Identifier et relier à des vues DT données.	Assemblages de cubes en PC couleurs	noc CE1 p58, 59 noc CM2, p181
Imaginer le dessous d'un solide (représenté sur papier pointé), et le représenter sur papier pointé.	PC pointillé, papier pointé.	noc CM2, p181.
Mettre en correspondance des points de vue différents.	Photo aérienne d'un quartier ; photos d'éléments du quartier ; et plan du quartier	noc CM2 p178,179
Reconnaître un objet sous plusieurs vues données.	Assemblages de cubes en PC couleurs	diag CM1, p24
Construire une vue de dessus d'un assemblage de pavés	PC coloré + ombré, sur quadrillage	diag CM2, p153
Reconnaître un objet sous plusieurs vues données.	Assemblages de cubes en PC couleurs	jam CE2 p30
Préciser le point de vue suivant lequel on voit (dessus ou dessous)		*bordas 6, p236*

LIRE DES REPRESENTATIONS PLANES

Deux assemblages de cubes, 1 cube a changé de place, lequel ?	diag CE1, p81
Assemblages de cubes, prévoir si on dispose d'assez de matériel	diag CM1, p24
Reconnaître une représentation en PC parmi 3 dessins	*bordas 6, p 236*
Reconnaître une représentation en PC d'une barre	*bordas 6, p 237*
Assemblage de cubes, déterminer si la réalisation est possible ?	*bordas 6, p238*
Repérer sur des représentations en perspective colorées, de cubes, les couleurs des faces opposées	*bordas 6, p 238*
Une représentation en PC d'un mur de briques, repérer l'épaisseur et la construction	*bordas 6, p 240*

Problèmes

Un cube et 2 couleurs. Déterminer le nombre de coloriages possibles. (PC et PA avec couleurs)	diag CM1, p177 (Rés. PB)
« Le cube trempé dans la peinture » (PA couleur et ombre)	diag CM2, p175 (Rés. PB)
La somme des arêtes d'un cube est de 60cm. Combien mesure une arête (PC pointillés)	*bordas 6, p236*

Décrire

La nature des faces Pyramide à base carrée	Patron + PA couleur pointillés	diag CE2, p120
Les faces planes ou non planes Objets du quotidien	Photo (+ ombre)	diag CE2, p14
Un cube construit avec 6 pyramides sans fond	Objet construit	diag CM2, p153
Les solides pouvant ou non rouler	PA ombrée, nom des objets, objets matériels	jam CE1, p91
Le nombre de faces d'un hexaèdre	Objet construit	noc CM1, p147

CONSTRUCTION D'OBJETS

En recherche libre
(sans représentation en perspective, ni patron ; divers matériaux à disposition)

Cube	Pâte à modeler, pailles, polygones cartonnés	noc CE2, p144
Cube avec contrainte de couleurs	Polygones papier	noc CE2, p144
Polyèdre de Platon	Polygones papier	noc CE2, p148
Ballon de foot	Pentagones et hexagones prédécoupés + photo	noc CM1, p148

En suivant un programme de construction

Globe terrestre	Patron donné en puzzle	noc CM1, p146
« La boîte du pâtissier »	Texte + PA + représentations pliages	noc CM2, p188
Cube	Texte + dessin ; patron et montage	diag CE1, p81
Pavé	Texte + patron et montage	diag CE1, p81
Boîte pour œufs de pâques	Texte + dessin patron et montage	diag CE1, p105
Dé à jouer	Texte + PA	diag CM1, p65
~~Dé à jouer~~	~~Représentation de type patron, plan de montage~~	~~diag CM1 p29~~
Pavé	Texte + dessin patron et montage	jam CE1, p93

A partir de solides déjà construits

Solides à partir de pyramides	noc CE2, p149
Hexaèdre à partir de tétraèdres	noc CM1, p147
Cube à partir de pyramides	diag CM2, p153

A partir d'une représentation plane (au moins, et autres)

Assemblages de cubes	PA neutre couleur	noc CE2, p147
Ballon de foot	Photo (pentagones et hexagones prédécoupés)	noc CM1, p148
Pyramides et prismes	Patrons ; Représentation Chimie ; Texte (polygones prédécoupés)	noc CM1, p150
Pyramides	Patrons	noc CM2 p187
Boîte à biscuit	PC neutre, dimensions données	noc CM2, p182
« La boîte du pâtissier »	Texte ; PA ; pliages	noc CM2 p188
Polyèdres non usuels	PA couleurs + Représentation Chimie (polygones prédécoupés)	noc CM2 p188
	Patrons	noc CM2 p189
Deltaèdres	PA couleur, épaisseur (triangles équilatéraux prédécoupés)	jam CE2, p136
Pavé	Patron	jam CM2, p115
Pyramide à base carrée	Patrons	diag CE2, p120
Pyramide tronquée et octaèdre	Patrons, PA ombrée	diag CE2, p130
Cube	Patrons, PA couleurs	diag CE2, p131
Prisme à base hexagonale	Texte, PA couleur, dessins, vue DT, dimensions données	diag CE2, p121
Assemblages de cubes	PC et PA couleur	diag CM1 p24

A partir d'un texte seul, sans illustration

Pavé	Dimensions données	noc CM2, p183
Cube	Longueur totale des arêtes donnée Aire totale du patron donnée	noc CM2, p185
Pyramides	Dimensions base données ; puis sans contrainte	noc CM2, p187

ASSOCIER DES REPRESENTATIONS DE REGISTRES DIFFERENTS

Associer patron(s) et représentation(s) en perspective

Pyramide tronquée et octaèdre	PA pointillés couleurs et patron avec languettes	diag CE2, p130
Cube	Patron à motifs, et PC à motifs	noc CE2, p147
Solides divers	PC et PA et patrons	noc CM1, p149

Associer des représentations en perspective à des représentations en perspective
Et texte pour les « qui suis-je ? »

Assemblages de cubes	Perspectives	diag CM1, p24
Objets du quotidien	Dessins vers Ombres	jam CP, p43
	RP et RP ombrée, autres positions ou variation taille	jam CE1, p91
	Texte ; PA ; PC	
Assemblages de cubes	Perspectives	jam CE2, p30 (Rés. PB)
Solides usuels	Emballages, PC pointillés	noc CE2, p46
	Emballages, PA neutre couleur	noc CE1, p57
	Texte vers PA neutre et emballages	noc CE1, p57
	PC pointillés et emballages vers texte	noc CE2, p47
	Texte vers PC pointillés 1 couleur	noc CM1, p145

Associer représentation(s) en perspective et empreintes

Empreintes, emballages, PC pointillés	noc CE2, p46
Empreintes, emballages, PC pointillés	diag CE1, p65
Empreintes, PC et PA pointillés couleur	diag CE2, p15

Décrire

Jeu du portrait	Emballages, PC pointillés	noc CE2, p47
Emission message pour construire	PA 2 couleurs, assemblages de cubes	noc CE2, p147
Le calendrier perpétuel (PB)	PC neutre couleur avec dessins	noc CM2, p184
Définir ce qu'est un prisme	PC pointillés	noc CM2, p186
Programme de construction d'un patron de pyramide, de dimensions données	Patron avec lignes de construction et PA couleurs	diag CM2, p149 (Rés. PB)

ACTIVITES SUR LES PATRONS DE SOLIDES

Situation d'introduction des patrons de solides

Habillage, emballage (cube)	noc CE2, p144
Habillage, emballage (pavé)	noc CE2, p146
Découpage suivant arêtes	diag CE2, p120

Reconnaître un patron parmi un ensemble de RP de type patron

Cube	noc CE2, p147
Cube	noc CM1 p147
Cube	noc CM2, p184
Pavé	noc CM2 p 182
Cube (+ PA couleurs pointillés)	diag CE2, p131
Pavé (en Rés. PB)	diag CM1 p171
Prisme à base triangulaire (+ PA pointillés)	jam CM1, p74
Pavé	jam CM2, p115
Cube	jam CM2, p121
Pavé	*bordas 6, p240*

Construire un patron de solide

Cube	Recherche de tous les patrons A partir de patrons de pentaminos	diag CM1, p27
Cube	A partir de faces où les côtés sont codés pour noter les arêtes communes	diag CM1, p28
Pyramide à base carrée	A partir d'une mise à plat par découpage du solide suivant les arêtes	diag CE2, p120
Pavé	Choisir un format de feuille pour y inscrire un patron de dimensions données	diag CM2, p133 (Résolution de PB)
Pyramide à base carrée tronquée	Agrandir le plus possible pour que le patron tienne dans une feuille A4	diag CM2, p166
Polyèdre	Représentation chimie à transcrire avec des gabarits des faces en patron	noc CM1, p151
Hexaèdre	A partir de l'objet construit	noc CM1, p147
Pyramides	Dessins	noc CM2, p186
Prisme à base triangulaire	PC, dimensions et angles donnés	jam CM2, p121
Cube	*Dimensions des arêtes données* *Deux patrons donnés*	*bordas 6, p236*
Pavé	*Dimensions données* *Patrons + PC pointillés*	*bordas 6, p237*
	Inscrire un patron dans une feuille de dimensions données	*bordas 6, p240*

Reproduire un patron de solide

Pyramide à base carrée	Agrandir un patron, papier blanc	diag CE2, p120
Cube	Agrandir un patron, papier cahier	diag CM1, p65
Tétraèdre régulier	Agrandir un patron, papier blanc	diag CM2, p10
Pyramide à base carrée, avec un angle droit	Patrons, avec texte programme de construction	diag CM2, p152
Pyramide à base carrée Pyramide à base hexagonale	Patrons avec languettes, papier blanc	noc CE2, p149

Tétraèdre	Patrons et PA ombrées	noc CM1, p147
Prisme à base hexagone régulier	Agrandir en doublant la mesure des côtés	noc CM1, p148

Compléter un dessin de type patron pour en faire un patron de solide

Prisme à base triangulaire	noc CM1, p149
Prisme à base pentagone régulier	noc CM1, p150
Pyramides (base carrée ; base pentagone régulier)	
Polyèdre (avec représentation de chimie à compléter)	noc CM1, p151
Pavé	noc CM2, p183
Pyramide à base rectangulaire, avec un angle droit	noc CM2, p187
Pavé (avec dimensions précisées)	*bordas 6, p237*
Cube	*bordas 6, p236*

Modifier un patron, en déplaçant une face

Pyramide à base rectangulaire avec un angle droit	noc CM2, p189

Indiquer le nombre de faces, arêtes, sommets (les uns et / ou les autres) d'un solide à partir d'un patron du solide

Polyèdres divers	faces, et prévision sur le nombre d'arêtes	noc CM2, p189
Tétraèdre régulier	faces et arêtes	diag CM2, p10

Etablir des relations d'incidence

Cube	Faces, arêtes, sommets	noc CE2, p146
Prisme à base pentagone régulier	Arêtes, sommets	noc CM1, p150
Prisme à base triangle équilatéral		
Pyramide à base carrée		
Pyramide à base pentagone régulier		
Pavé	Arêtes, sommets	noc CM2, p183
Cube	Arêtes, sommets	noc CM2, p185
Pyramides	Arêtes	noc CM2, p187
Cube	Nombre de couleurs à choisir pour arêtes respectant certaines contraintes	noc CM2, p185
Pyramides	Arêtes	jam, CE1, p93
Pavé	Arêtes	jam CM1, p72
Cube	Construire des patrons à partir des faces séparées mais codées pour chaque arête.	diag CM1, p28
Cube	Position des languettes de collage	diag CM1, p28
Cube	*Parallélisme et orthogonalité des arêtes*	*bordas 6, p238*
	Parallélisme et orthogonalité des faces et arêtes	*bordas 6, p238*

Articuler données sur le patron et données sur l'objet ou sur une représentation en perspective

Ecrire des chiffres sur les faces d'un patron de dé (avec PA pointillés couleur et flèches pour indiquer les faces cachées)	diag CE2, p131
Patrons à motifs à mettre en relation avec PC à motifs Ecrire les constellations sur les faces d'un patron de dé (à partir de 3 PA neutre à motifs) Colorier les faces sur le patron d'un cube, avec contraintes	noc CE2, p147 noc CM1, p147 noc CM2, p185
Colorier les faces sur le patron d'un solide, avec contraintes *Colorier les faces sur le patron d'un solide, avec contraintes* *Ecrire des chiffres sur les faces d'un patron de dé* *Ruban à mettre sur le patron d'une pavé (avec PA)* *Dessin sur PC à reproduire sur un patron*	*bordas 6, p236* *bordas 6, p237* *bordas 6, p237* *bordas 6, p241* *bordas 6, p242*

Effectuer des mesures

	bordas 6, p237

Pour « Associer patrons et représentations en perspective » et « Constructions d'objets à partir de patrons » se reporter aux tableaux des pages précédentes concernant les représentations en perspective.

2a

Troisième période

OBJECTIFS

1. Il s'agit maintenant d'utiliser la structuration des tables de multiplication avec les repères 5 et 10. Les résultats n fois 5 et n fois 10 sont en effet faciles à mémoriser et sont liés. Ils permettent de retrouver 4 fois 6 en partant de 4 fois 5 et 4 fois 9 en partant de 4 fois 10, par exemple. A terme, la même méthode permet de retrouver 4 fois 7 et 4 fois 8. Il est donc essentiel que les tables ne comportent que les résultats « stratégiques », et que les autres cases restent vides.

2. En géométrie, on aborde ici des activités de classement et d'analyse des solides. L'objectif essentiel est d'amener les élèves à reconnaître des solides dans des présentations atypiques : cylindres très aplatis (comme une pièce de monnaie), etc. Là encore il s'agira de dépasser une reconnaissance perceptive pour aller vers une conception des propriétés géométriques de ces objets.

ACTIVITÉS page 90

A. Calcul oral

Multiplications faciles du même type que page 84.

B. Vers la mémorisation des tables

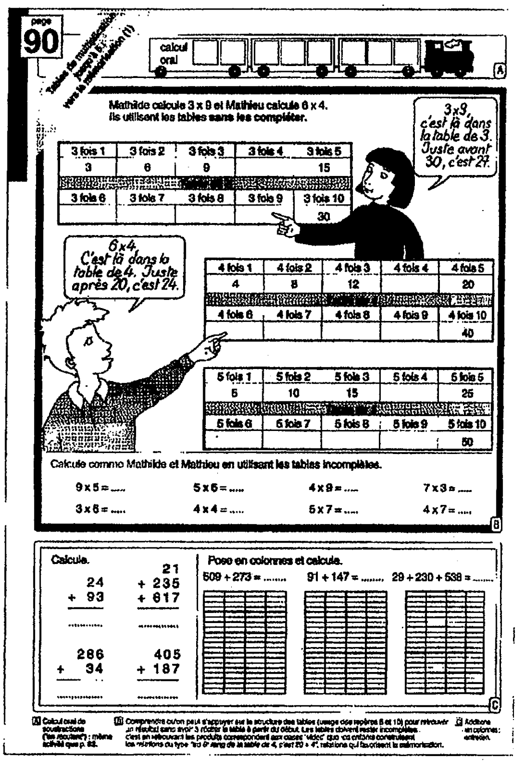
Les tables collectives seront utilisées comme relais de l'activité du fichier : l'enseignant n'a donc laissé, sur ces tables, que les Post'it correspondant aux résultats « stratégiques ». Ces tables collectives comme celles du fichier resteront incomplètes tout au long de l'activité.

Activité préliminaire

L'enseignant écrit par exemple 6 x 4 au tableau. Un enfant vient montrer dans quelle case devrait figurer ce résultat. Les élèves écrivent le résultat sur leur ardoise. On compare les stratégies et on explicite celle qui s'appuye sur le résultat antérieur : dans la table de 4, les résultats vont de 4 en 4, après 20 c'est 24. On calcule 4 fois 6 *« en partant de la 5ᵉ case »* de la table de 4.

On cherche ainsi des cas variés parmi les cases vides. Pour n fois 9, certains élèves sont susceptibles d'inventer la stratégie qui consiste à s'appuyer sur le repère 10. Elle est explicitée. Par exemple pour 3 x 9 *« en partant de la 10ᵉ case : de 3 fois 10 à 3 fois 1, à chaque fois on retire 3 »* (il n'est pas utile d'écrire la soustraction 40 - 4). 3 fois 9 c'est juste avant 30, c'est 27. Pour n fois 8, on pourra confronter les deux stratégies *« en partant de la 5ᵉ case »* ou *« en partant de la 10ᵉ case »*.

136


page 90

Tables de multiplication jusqu'à 5 : vers la mémorisation (1)

calcul oral

Mathilde calcule 3 x 9 et Mathieu calcule 6 x 4.
Ils utilisent les tables sans les compléter.

3 fois 1	3 fois 2	3 fois 3	3 fois 4	3 fois 5
3	6	9		15
3 fois 6	3 fois 7	3 fois 8	3 fois 9	3 fois 10
				30

4 fois 1	4 fois 2	4 fois 3	4 fois 4	4 fois 5
4	8	12		20
4 fois 6	4 fois 7	4 fois 8	4 fois 9	4 fois 10
				40

5 fois 1	5 fois 2	5 fois 3	5 fois 4	5 fois 5
5	10	15		25
5 fois 6	5 fois 7	5 fois 8	5 fois 9	5 fois 10
				50

Calcule comme Mathilde et Mathieu en utilisant les tables incomplètes.

9 x 5 = ... 5 x 6 = ... 4 x 9 = ... 7 x 3 = ...

3 x 6 = ... 4 x 4 = ... 5 x 7 = ... 4 x 7 = ...

Calcule.

24 + 93 = ...

21 + 235 + 617 = ...

286 + 34 = ...

405 + 187 = ...

Pose en colonnes et calcule.

509 + 273 = ... 91 + 147 = ... 29 + 230 + 538 = ...

C. Additions en colonnes : entretien

ACTIVITÉS page 91

A. Calcul oral

Interrogations sur les tables de 3 à 5 avec le mot « fois » en insistant sur n fois 5, n fois 6, n fois 9 et n fois 10. L'enseignant propose aussi des cas du type n fois 7 ou n fois 8 si le niveau de la classe le permet. Les élèves répondent sur l'ardoise. Même activité sur le fichier.

Prolongement possible

Dans une 2ᵉ phase de cette interrogation, on peut masquer les tables et proposer des cas qui se succèdent par deux, par exemple : 4 fois 10 et 4 fois 9, puis 3 fois 5 et 3 fois 6, puis 5 fois 10 et 5 fois 9, ... Le 1ᵉʳ cas aide à trouver le 2ᵉ.

B, C et D. Analyser des solides

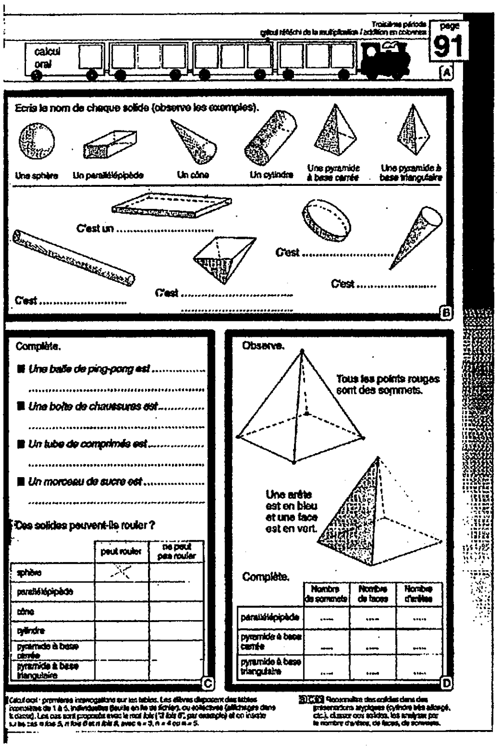
Activités préliminaires

1. Trier des objets ordinaires

L'enseignant a rassemblé divers objets :

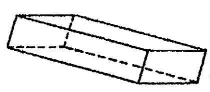
a) *des sphères* (perle, bille, calot, balle de ping-pong, de tennis, ballon de hand-ball, de foot ...) ;

PAGES 90-91
Folios élève



b) *des parallélépipèdes* (boîte à chaussures, règle à tracer, planchette, cube, morceau de sucre, feuille de carton très épais, par exemple) ;
c) *des cylindres* (boîte de camembert, pièce de monnaie, boîte de sel, bâton de colle, crayon à section circulaire non taillé, par exemple).
Les élèves doivent les classer selon leur forme. On aboutira à un classement en 3 catégories : « ceux qui roulent », « ceux qui glissent » et ceux qui « peuvent rouler sur une face et glisser sur 2 autres ».

2. Analyse selon les faces, arêtes et sommets
L'enseignant a préparé 3 « cartes d'identité » de solides sur le modèle suivant :



Nom : *parallélépipède*
Nombre de faces : .....
Nombre d'arêtes : .....
Nombre de sommets : .....

A chaque fois, le dessin qui sert de référence est celui d'un solide typique de sa catégorie (comme ci-dessus pour le parallélépipède). L'activité consiste à dénombrer les faces, les arêtes et les sommets sur ce solide, puis sur les autres solides qui sont moins caractéristiques mais qui seront alors reconnus comme appartenant à la catégorie. Elle peut se mener de la manière suivante :
L'enseignant extrait un parallélépipède caractéristique. Le vocabulaire est introduit : en géométrie... on appelle cela « un parallélépipède ». Combien de faces a-t-il ? Il y a la face de devant, celle de derrière, ... (le mot « face » ne se réduit donc pas à désigner la face qui est « devant »). On peut les numéroter et faire le rapprochement avec les 6 faces d'un dé numérotées de 1 à 6. On décrit aussi la forme des faces. L'enseignant montre ensuite une arête et introduit ce mot. Combien d'arêtes a ce parallélépipède ? On peut remarquer que les arêtes sont parallèles deux à deux, d'où son nom. Même démarche pour les sommets (un sommet n'est pas toujours « en haut », remarque sur laquelle on insistera lors de la description ultérieure des pyramides et des cônes). On conclut en complétant la « carte d'identité » : 6 faces, 12 arêtes, 8 sommets.
Puis l'enseignant fait analyser divers objets rangés dans la catégorie des solides « qui glissent ». La planche par exemple : est-ce aussi un parallélépipède ? A-t-elle le même nombre de faces, d'arêtes, de sommets ? Et la feuille de carton épais ?
On procède de la même façon pour analyser un cylindre caractéristique (le mot est introduit). La « carte d'identité » de ce cylindre est complétée. Puis on analyse d'autres cylindres de plus en plus atypiques en référence avec la carte d'identité. On dresse aussi la « carte d'identité » des sphères (ce mot est alors introduit).

3. Eléments perturbateurs
Si l'enseignant peut disposer du matériel géométrique Nathan, il apporte alors des éléments de ce matériel : sphères, cylindres, parallélépipèdes, mais aussi cônes et pyramides. Sinon, il introduit le dessin de ces 2 derniers objets exécuté en haut de leur carte d'identité encore vierge. Les 3 premiers types d'objets ont bien les propriétés de leur catégorie. Mais un problème surgit pour le cône : il n'a que 2 faces, l'une qui roule et l'autre qui glisse. On crée une sous-catégorie particulière. Même démarche pour les pyramides. On aboutit à un classement à deux étages :

roulent	***roulent et glissent***		***glissent***		
sphères	cylindres	cônes	para.	p. c.	p. t. .....

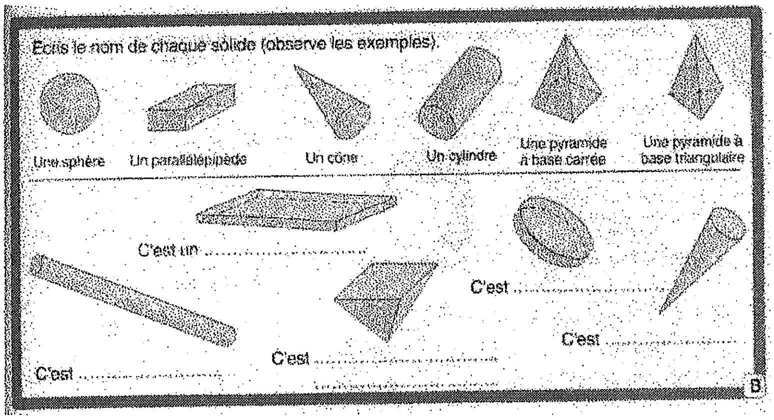
(para. = parallélépipède ; p. c. = pyramide à base carrée ; p. t. = pyramide à base triangulaire)

Pour conclure, l'enseignant peut extraire quelques solides « atypiques » et interroger les élèves : quel est le nom de ce solide ? Celui-ci peut-il rouler ou non ? Et celui-là, combien de sommets a-t-il ? ... types d'interrogations qu'on retrouve sur le fichier.

Activités du fichier
Les élèves sont invités à se servir de la liste de référence figurant en haut de la page. Les tableaux construits précédemment sont masqués.

137

2b



3a

3 Observer et classer des solides (1)

Fichier de l'élève page 65

La dizaine la plus proche. Écrire au tableau ou dire un nombre compris entre 1 et 99 (alterner les deux présentations). Faire écrire par chaque enfant, sur son ardoise, la dizaine la plus proche. Procéder en trois étapes : écouter, écrire, montrer. Reprendre plusieurs fois l'activité.
REMARQUE : Pour les nombres dont le chiffre des unités est 5, il y a deux possibilités.

OBJECTIFS POUR LE MAÎTRE

- Faire observer et classer des solides.
- Faire acquérir un vocabulaire spécifique relatif aux solides.

1re phase : découvrir les objets

MATÉRIEL : une collection d'objets ayant des formes de solides géométriques connus ou non (sphères, cubes, pyramides,...).

◆ Rassembler les enfants par trois ou quatre et donner à chaque groupe quelques objets de la collection préparée. Laisser un temps libre de découverte de ces objets. Faire formuler le plus possible de remarques.

Remarques

◆ Cette collection est constituée d'objets hétéroclites : boîtes d'emballage, boules,...
Prévoir plusieurs objets cubiques (par exemple des dés).
◆ Les enfants reconnaissent des boîtes, des emballages et s'intéressent à des aspects divers : forme, matériaux, mots éventuellement écrits sur les emballages,...

2e phase : classer les solides

MATÉRIEL : le même que précédemment.

◆ Inviter chaque groupe à effectuer un classement des solides dont il dispose. Préciser que ce classement sera présenté et expliqué aux autres groupes. Surveiller les groupes et encourager ceux qui ont du mal à s'organiser. Inciter à la manipulation des objets.

◆ Après le temps de recherche, faire formuler, par chaque groupe, le critère de sa classification. Au besoin, faire affiner les classements et les prolonger en proposant de nouveaux objets à classer.

◆ S'il n'est pas apparu, introduire le critère de classement : « ce qui roule », afin de dégager la notion de face plane.

◆ Faire décrire les différentes faces planes des objets disponibles. Faire rechercher des objets dont certaines faces sont des carrés et parmi eux ceux dont toutes les faces sont des carrés. Introduire le mot : **cube**.

◆ Donner le mot employé pour désigner tous les objets manipulés par les enfants : ce sont des **solides**.

◆ Les critères de classement sont variés :
- selon la taille (grand-petit) ;
- selon la forme ;
- selon la couleur ;
- selon le matériau utilisé ;
- selon son emploi (ce qui se mange,...)
- selon le critère : « ce qui roule »...

◆ Il est indispensable que chacun puisse exprimer ses arguments.

◆ Certains objets roulent. D'autres glissent sur une face plane.

◆ Le mot « cube » est souvent connu des enfants.

3e phase : application individuelle

◆ Demander à chaque enfant d'observer l'image du fichier page 65. Recueillir toutes les remarques sur les objets représentés et faire apparaître le lien entre le dessin de l'objet et sa représentation géométrique.

◆ Faire réaliser par chaque enfant l'exercice 1.

◆ Il s'agit d'objets dessinés avec, en vis-à-vis, une représentation géométrique.

4 SÉANCE Observer et classer des solides (2)

Fichier de l'élève page 65

Calcul de sommes. Faire calculer et écrire sur l'ardoise des sommes données oralement ou par écrit (les deux nombres sont inférieurs à 10). Procéder en trois étapes : écouter, écrire, montrer. Mettre en évidence une méthode consistant à utiliser 5 : 6 + 7 ; 6 = 5 + 1 ; 7 = 5 + 2 ; 5 + 5 + 1 + 2 = 10 + 3 ; 10 + 3 = 13.

OBJECTIFS POUR LE MAÎTRE

- Faire classer des solides selon des critères géométriques.
- Faire acquérir un vocabulaire spécifique relatif aux solides.

1re phase : classer selon des critères géométriques

MATÉRIEL : une collection de solides convexes à faces planes.

◆ Présenter aux enfants la collection de solides préparés. Recueillir les remarques. Faire apparaître que les solides choisis ont tous les mêmes propriétés : ils ne peuvent pas rouler, ils ont des faces planes, ils « glissent » sur toutes les faces.

◆ Faire observer les faces de ces solides. Demander de nommer les formes repérées : carrés, rectangles, triangles... Faire procéder au dénombrement des faces de chaque solide puis à un classement suivant le nombre de faces.

◆ Introduire les termes : **arête, sommet** et en vérifier la compréhension par des manipulations. Faire procéder au dénombrement des sommets, puis des arêtes de chaque solide.

◆ Demander à un enfant de rechercher un solide qui a toutes ses faces carrées. Faire rappeler son nom (un cube) et le caractériser : *Un cube est un solide qui a ses six faces carrées.*

2e phase : réaliser des empreintes

MATÉRIEL : – le même que précédemment ;
– des feuilles blanches.

◆ Grouper les enfants par deux. Donner une feuille blanche et un solide à chaque équipe et demander de dessiner les contours de chaque face du solide.

◆ Examiner collectivement les résultats obtenus en complétant ou en corrigeant le cas échéant. Indiquer le terme choisi pour désigner les dessins effectués : **des empreintes.**

◆ Engager un « jeu du portrait ». Faire sortir un enfant et demander aux autres enfants de la classe de choisir un solide et d'afficher au tableau la feuille d'empreintes de ce solide. Rappeler l'enfant et lui faire retrouver le solide choisi. Reprendre plusieurs fois cette activité.

3e phase : application individuelle

Exercices 2 et 3 page 65.

Remarques

◆ **Pavé, cube, pyramide, etc.**

◆ **Disposer les objets sur une table, bien en vue des enfants.**

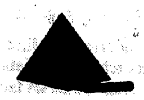
◆ **Exemples de remarques : *Ce sont des solides. On peut les classer.***

◆ **Le fait de « glisser » sur toutes les faces caractérise les solides convexes à faces planes.**

◆ **Il pourra être nécessaire de numéroter les faces pour éviter des erreurs de comptage.**

◆ **Ce travail peut être réalisé par groupe si on dispose d'un nombre important de solides.**

◆ **Par exemple :**

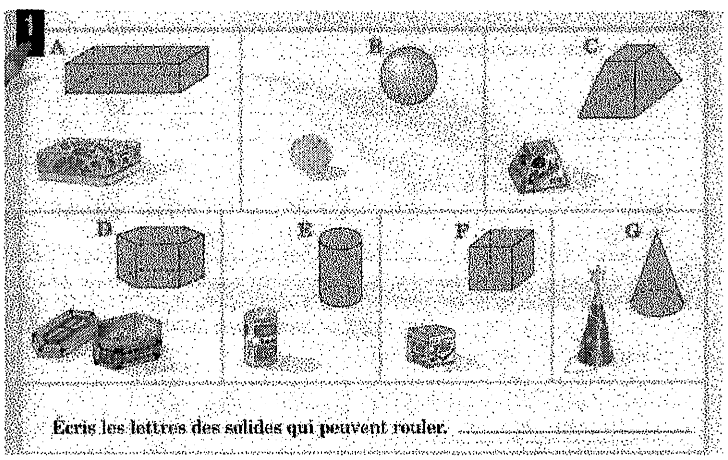


◆ **Ces « empreintes » peuvent aussi être réalisées avec de la peinture ou de la pâte à modeler.**

◆ **Certains groupes oublient des faces.**

◆ **Permettre aux enfants en difficulté de manipuler des solides du même type que ceux qui sont représentés.**

3b



4a

OBJECTIF

Identifier des solides, les décrire.

DOMAINES DE COMPÉTENCES

Au CP, les enfants ont appris à identifier certaines figures planes dans diverses positions, en particulier les rectangles, les carrés, les triangles, les cercles. Le vocabulaire n'est sans doute pas fixé pour de nombreux enfants. L'un des objectifs de cette étape est de réinvestir ce vocabulaire pour décrire des objets que l'on va désigner par le terme générique de « solide ». Ces solides vont être manipulés, décrits, reconnus, identifiés. Les termes « face », « arête », « sommet », seront amenés progressivement par le maître pour affiner les descriptions ; ils ne sont pas exigibles de la part des élèves, mais c'est en les utilisant dans des situations fonctionnelles qu'ils prendront leur sens et que les élèves vont les mémoriser.

De nombreuses activités de dénombrement de ces éléments sur de « vrais » solides (et non sur des représentations planes) vont notamment être proposées pour aider les enfants à observer finement ces solides. Il est également nécessaire de proposer aux élèves des activités de description de solides qui auront été observés et manipulés mais qui ne seront plus visibles au moment de la description, ceci de manière à provoquer chez les élèves le rappel en mémoire des images mentales qu'ils se seront construites au moment de la manipulation.

Il n'est, par ailleurs, pas évident pour un enfant qu'un dessin plan en perspective puisse représenter un objet de l'espace à trois dimensions. Un second objectif de cette étape est donc de conduire les enfants à associer tout d'abord des objets familiers à des dessins plans de ces objets grâce à divers indices les rendant reconnaissables, puis les dessins de ces objets à des représentations planes conventionnelles en perspective des solides géométriques de mêmes formes que ces objets (par exemple, l'élève reconnaît, dans un dessin plan, la représentation d'une boite de céréales, puis il associe à ce dessin la représentation en perspective d'un parallélépipède rectangle ou pavé droit). Ce travail est fondamental pour que les enfants puissent identifier, à partir de représentations planes conventionnelles, les solides auxquels elles sont associées.

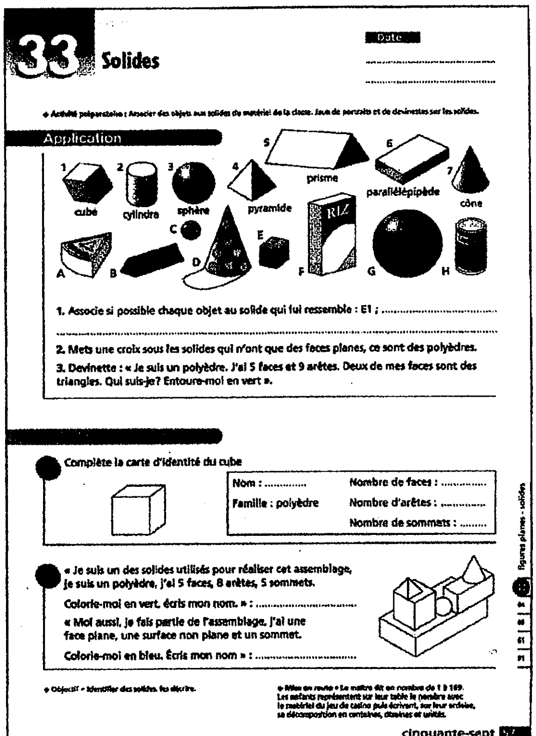
On comprend dès lors qu'il n'est pas possible de travailler sur le fichier avant d'avoir proposé aux élèves de nombreuses activités avec de « vrais » solides (en trois dimensions).

ORGANISATION DE L'ÉTAPE

3 séances :
- 1re séance : activités préparatoires 1, 2, 3 ;
- 2e séance : activités préparatoires 4, 5 ;
- 3e séance : application et exercices.

MATÉRIEL

Solides, balles ou boules, boîtes et emballages divers apportés par


33 Solides

Date

◆ Activité préparatoire : Associer des objets aux solides du matériel de la classe. Jeux de portraits et de devinettes sur les solides.

Application

1. Associe si possible chaque objet au solide qui lui ressemble : E1 ; ....

2. Mets une croix sous les solides qui n'ont que des faces planes, ce sont des polyèdres.

3. Devinette : « Je suis un polyèdre. J'ai 5 faces et 9 arêtes. Deux de mes faces sont des triangles. Qui suis-je? Entoure-moi en vert ».

Complète la carte d'identité du cube

Nom :	Nombre de faces : ....
Famille : polyèdre	Nombre d'arêtes : ....
	Nombre de sommets : ....

« Je suis un des solides utilisés pour réaliser cet assemblage, je suis un polyèdre, j'ai 5 faces, 8 arêtes, 5 sommets.
Colorie-moi en vert. Écris mon nom. » : ....
« Moi aussi, je fais partie de l'assemblage. J'ai une face plane, une surface non plane et un sommet.
Colorie-moi en bleu. Écris mon nom » : ....

figures planes - solides

◆ Objectif : Identifier des solides, les décrire.

◆ Mise en route : Le maître dit un nombre de 1 à 169. Les enfants représentent sur leur table le nombre avec le matériel du jeu de casino puis écrivent, sur leur ardoise, sa décomposition en centaines, dizaines et unités.

cinquante-sept 57

le maître et éventuellement par les enfants.

Les solides en cartons ou en bois (cf. fiches photocopiables page 239 à 246). Prévoir un jeu pour 4 ou 5 enfants.

Une affiche sur laquelle sont représentés ces solides (agrandissement de la fiche photocopiable page 247).

Le fichier de l'élève page 57.

Mise en route

Le maître dit un nombre de 1 à 169. Les enfants représentent sur leur table le nombre avec le matériel du jeu du casino puis écrivent, sur leur ardoise, sa décomposition en centaines, dizaines et unités.

Activité préparatoire

Manipuler des solides, les observer, les classer. Identifier les polyèdres.

ACTIVITÉ 1 : SOLIDES ET POLYÈDRES

Mettre à la disposition des enfants le matériel apporté, donner un temps d'observation et de formulation des diverses remarques. Dire aux enfants que tous ces objets s'appellent des « solides ».

Faire la distinction avec la signification courante de l'adjectif « solide » (résistant, contraire de liquide, etc.).
Introduire la notion de « surface » du solide qui délimite l'intérieur et l'extérieur de l'objet. Faire « balayer » avec la main les surfaces de différents solides pour constater que les solides sont généralement des objets fermés, que certaines surfaces sont arrondies, d'autres plates ou planes.
Proposer aux enfants de faire un classement des solides en deux familles :
- les solides dont toutes les surfaces sont planes ;
- les solides dont la surface est arrondie partout ou par endroits.
Introduire le nom de « polyèdre » pour désigner les solides dont toutes les faces sont planes.

ACTIVITÉ 2 : FACES, ARETES, SOMMETS

1. Donner à chaque groupe d'élèves le même polyèdre. Donner le vocabulaire « face », « arête », « sommet ». Demander de dénombrer les faces, puis les arêtes et les sommets. Confronter les propositions, les faire justifier.
2. Donner à chaque groupe d'élèves 4 ou 5 polyèdres différents. Leur demander d'en choisir un, de dénombrer ses faces, ses arêtes, ses sommets et d'écrire un message pour qu'un autre groupe trouve le solide qu'ils ont choisi, échanger les messages deux à deux. À partir du message reçu, les enfants doivent retrouver le polyèdre choisi par leurs camarades. Les deux groupes se retrouvent pour vérifier.
3. Donner à chaque élève un polyèdre. Demander de dénombrer les faces, les arêtes, les sommets mais sans toucher le polyèdre et sans faire de marques dessus. Confronter les propositions des enfants ayant le même solide ; les enfants valident leurs propositions en manipulant leur solide et en faisant des marques éventuellement au fur et à mesure du comptage. Cette activité peut être reprise en présentant de loin un solide que les enfants ont déjà beaucoup manipulé pour obliger les enfants à s'appuyer pour le dénombrement non sur l'objet réel, mais sur l'image mentale qu'ils s'en sont construite.

ACTIVITÉ 3 : JEU DU PORTRAIT

1. Le maître distribue à chaque groupe divers solides, puis il présente le jeu.
Il a choisi un solide qu'il a caché. Il va le décrire et les enfants qui pensent avoir un solide de même forme que celui-là viendront le poser sur le bureau. On vérifiera en montrant le solide caché.
Un pavé droit peut être décrit en disant : « Le solide caché est un polyèdre, il a six faces, ses faces sont des rectangles. » ou bien « Le solide caché a toutes ses faces planes, il a 12 arêtes, 8 sommets, ses faces sont rectangulaires. »
Recommencer avec divers solides.
2. Placer divers solides à la vue des enfants. Présenter le jeu : « Deux enfants vont devoir découvrir le solide choisi par leurs camarades en leur posant des questions auxquelles il ne sera répondu que par oui ou non. »
Faire sortir deux enfants. Choisir avec les autres un solide, rechercher les informations utiles pour le décrire puis le remettre parmi les autres solides. Faire rentrer les deux enfants qui posent des questions. À chaque réponse, ils peuvent s'organiser pour éliminer les solides qui ne conviennent pas. Lorsque le solide est découvert, les deux enfants donnent son nom.
Collectivement, établir « la carte d'identité » du solide découvert (nom, nombre de faces, d'arêtes, de sommets).
Jouer plusieurs fois.

ACTIVITÉ 4 : CONSTRUCTION

Poser sur le bureau du maître plusieurs boîtes dans lesquelles sont placés des polygones permettant de construire des solides analogues à ceux qui sont construits et quelques autres : une boite contient des carrés de différentes tailles, une autre des rectangles de différentes tailles, une autre des triangles de différentes tailles, une autre des pentagones, une autre des disques.
Distribuer un polyèdre différent à chaque groupe (cube, pavé, pyramide à base carrée, pyramide à base triangulaire, prisme à base triangulaire).
Dire aux enfants qu'ils vont construire le même solide que celui qu'ils ont reçu en assemblant les faces avec du scotch. Pour cela, ils doivent tout d'abord bien observer le solide, puis envoyer un enfant du groupe qui doit prendre en un seul voyage juste ce qu'il faut comme faces pour faire la construction, ni trop ni pas assez, et qu'ils doivent bien faire attention aux formes qu'ils choisissent.
Dans chaque groupe, laisser les enfants s'organiser : ils peuvent écrire, dessiner, ou simplement mémoriser ce qu'il faut. Quand l'enfant revient avec le matériel, les autres vérifient, et s'organisent pour construire. S'il manque des faces, s'il y en a trop, ou si les formes ne sont pas convenables, le groupe marque à chaque fois un point de pénalité et va chercher ce qu'il faut. Les gagnants sont ceux qui réussissent à construire le solide avec le moins de points de pénalité. (Le maître choisit les solides à construire en fonction des compétences des élèves du groupe.)

ACTIVITÉ 5 : DE L'ESPACE AU PLAN

Distribuer à chaque groupe plusieurs solides. Afficher au tableau une grande feuille sur laquelle figurent les représentations planes conventionnelles des solides (agrandissement de la fiche photocopiable page 000)
Montrer une représentation, et demander aux enfants de chercher s'ils possèdent le solide qui est ainsi représenté. Si oui, ils le montrent, et un enfant vient montrer au tableau comment est placé le solide pour qu'on puisse le voir ainsi.
Reprendre cette activité avec un enfant comme meneur de jeu : il choisit un solide sans montrer lequel à ses camarades et le met dans un sac opaque. Il vient montrer sa représentation plane au tableau, les autres enfants exhibent le solide qui leur semble être représenté. Le meneur de jeu sort son solide de son sac pour le confronter aux propositions. S'il y a erreur, soit de la part du meneur de jeu, soit de la part des autres élèves, ces erreurs sont analysées.

Application

EXPLORATION COLLECTIVE

Les enfants observent la situation et racontent ce qu'ils ont compris. Ils doivent distinguer les représentations des solides de celles des objets familiers.
Faire lire les consignes et le texte.

TRAVAIL INDIVIDUEL

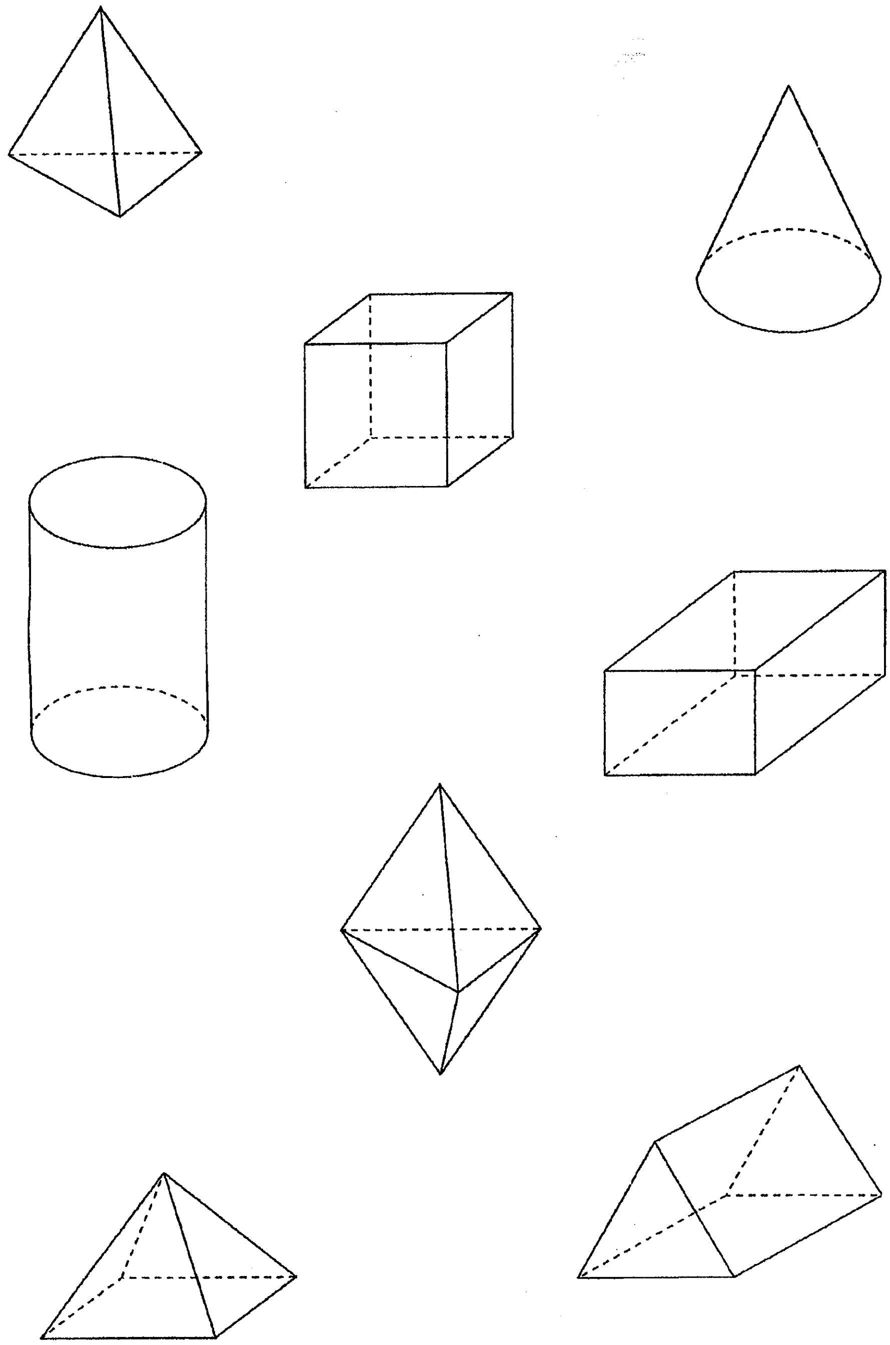
MISE EN COMMUN

Validation des propositions par confrontation avec les solides ou les objets «réels»

EXERCICE 1 : Décrire un solide.
Solides à disposition des élèves.
Faire lire la consigne et le texte. Amener les enfants à évoquer le travail effectué lors des activités préparatoires. Rappeler comment on distingue un polyèdre et ce qu'on appelle sa carte d'identité.
Travail individuel.
Correction collective à partir d'un cube.

EXERCICE 2 : « Lire » une représentation plane d'un assemblage.
Faire lire le texte. Faire le lien avec le jeu du portrait.
Travail individuel.
Regrouper les enfants qui semblent en difficulté, leur proposer de réaliser l'assemblage avec les solides du matériel.
Mise en commun.

4b



5a

Enoncé extrait de Math-4ème, Hachette-ISTRA, IREM de Strasbourg

1° Représenter, comme ci-contre, un cube dont l'arête mesure 5,5 cm.

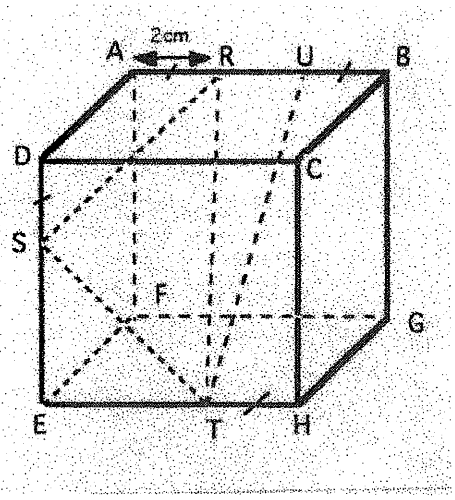
2° Placer les points R, S et T sur les arêtes AB, DE et EH, tels que AR = DS = HT = 2 cm.

3° Calculer ST^2 et RS^2 (on admettra que le triangle RDS est rectangle en D).

4° Placer le point U sur l'arête AB tel que BU = 2 cm.
Quelle est la nature du quadrilatère BHTU ?
Utiliser alors le triangle TUR pour calculer RT^2.

5° Prouver que le triangle RST est rectangle.

6° Construire, au compas et à la règle, en vraie grandeur, les triangles ARD, RDS et RST.



5b

Enoncé donné en formation continue (avec la même figure)

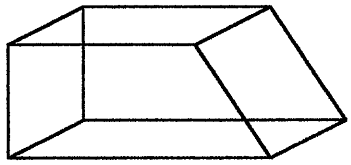
1. Représenter, comme ci-contre, en vraie grandeur, un cube dont l'arête mesure 5,5 cm.
2. Placer les points R, S et T sur les arêtes [AB] , [DE] et [EH], tels que AR=DS=HT=2cm.
3. Le triangle RDS est un triangle rectangle. Expliquer pourquoi.
4. Placer le point U sur l'arête [AB] tel que BU=2cm.
   Quelle est la nature du quadrilatère BHTU ? Expliquer.
   Quelle est la nature du triangle TUR ? Expliquer.
5. Construire, au compas et à la règle, en vraie grandeur, les triangles ARD, RDS, TUR et RST, sans faire aucun calcul.

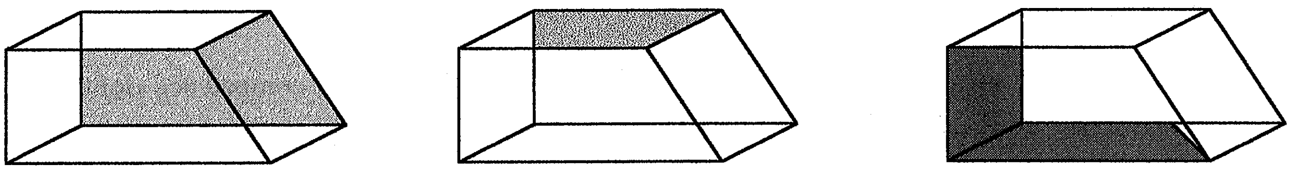
Stage de Formation Continue, « Maths/Techno », avril-mai 2001
Extrait séance du lundi 7 mai
Thème : représentations de solides en perspective

En italique, les interventions des stagiaires ; en caractères normal les miennes. Cette reprise est faite à partir de notes personnelles prises au cours et à l'issue à la séance. L'ensemble de cette séance a duré environ 3h. Nombre de stagiaires : 10.

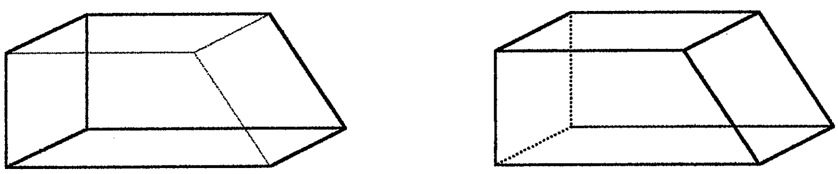
- Nous avons travaillé jeudi et vendredi sur les patrons de solides, et les solides, sans jamais faire intervenir de représentations en perspective ; aujourd'hui, nous allons nous centrer sur cet aspect du travail autour des solides.

J'affiche au tableau trois productions d'élèves de CM2 réalisées avec la consigne « voici une représentation d'un solide, colorie une face de ce solide ».

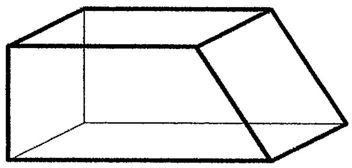




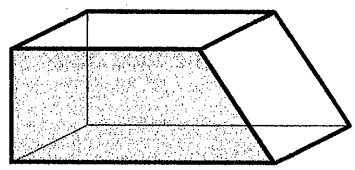
Remarques par rapport à ces productions :
- *Peut-être un problème de consigne.*
- *Peut-être l'habitude de ne pas dépasser les traits pleins quand on fait du coloriage.*
- *Peut-être ils ne repèrent pas le volume, le solide.*
- *Ils ont du mal à mettre le dessin en relief.*
- *C'était des élèves de quel niveau ?* (CM2) *Et combien d'élèves sur la classe faisaient ces erreurs ?* (pas nécessairement celles-ci, mais environ un tiers de la classe).
- *Ils ne repèrent pas les arêtes visibles et non visibles.*
- On ne peut pas dire dans ce dessin quelles sont les arêtes visibles et celles non visibles, tout dépend de la façon dont on *voit* le solide à partir du dessin. Par exemple si j'utilise les pointillés pour noter les arêtes qui seraient invisibles si le solide était vu avec des faces pleines, je peux produire deux dessins différents, qui rendent compte de deux visions différentes.



- *Moi je le vois comme ça (dessin de gauche).*
- *Moi je le vois comme ça (dessin de droite).*
- *On aurait dû demander aux élèves de mettre les pointillés.*
- *On aurait dû mettre les pointillés.*
- Les auteurs du sujet auraient peut-être dû mettre les pointillés.



- Regardons l'exercice similaire extrait de l'évaluation 2000 (utilisé également dans des évaluations précédentes), où les auteurs n'ont pas utilisé les pointillés, mais ont utilisé des traits fins, et des traits épais, pour figurer la convention des arêtes visibles ou non.



- La tâche est la même, il s'agit de colorier une face du solide. Pour cette tâche, on trouve près de 95 % de réussite, avec comme face principalement coloriée, la face du premier plan.

- On peut se poser la question suivante : la réussite tient-elle à la compétence dont nous parlions tout à l'heure, à savoir, redonner du relief à un dessin pour se représenter un solide en volume ? Ou bien cela est-il dû à la prégnance visuelle de cette face, considérée plutôt comme une figure trop visible pour ne pas être celle demandée.
- *En effet, on peut se le demander.*
- *On ne peut conclure, peut-être les deux.*
- *Pour certains, ils ont la compétence, pour d'autres non, c'est peut-être du hasard.*
- Remarquons dans le doute, que pour le dénombrement des arêtes du solide (autre tâche proposée en première question dans cet exercice), le taux de réussite est d'environ 70 %.

- Poursuivons l'analyse sur un autre travail, celui d'un élève de CE2 (appendice 1), donné en évaluation d'un travail sur les solides, suite à une approche classique en classe de ce thème (quelques activités de description et de dénombrement).
- *Pourquoi deux arêtes verticales dans le E, celles du fond, sont en traits pleins ?*
- Erreur en effet si l'on considère que l'on met en pointillés des arêtes non visibles avec les solides à faces pleines.
- *Pour l'exercice 2, le triangle convient comme empreinte pour le D et le A. Et le rectangle convient pour le B et le E.*
- *Est-ce que l'empreinte c'est forcément la face qui se trouve sur la table ?*
- Non bien sûr, c'est n'importe quelle face plane du solide pour les polyèdres.

- *Pour le B c'est bizarre, parce que c'est un pavé, et ce solide est connu des enfants, ils savent en général au moins qu'il a six faces.*
- *Peut-être cela indique que l'élève ne fait pas du tout référence au solide, mais ne regarde que le dessin.*

- Quelles remarques sur le repérage des sommets ?
- *Vraisemblablement pour les sommets l'élève repère les sommets extrémités des traits pleins seulement (les sommets visibles) : 6 pour le A ça marche ; 7 pour le B ; aucun pour le C ; 4 pour le D ça marche ; 10 pour le E.*
- *Pour le C, peut-être comme le dessin est différent des autres l'élève se souvient du solide, et qu'il n'a pas de sommet.*
- *On ne sait pas.*

- Quelles remarques sur le repérage des arêtes ?
- *Pour les arêtes il semblerait que l'élève compte les traits pleins uniquement.*
- *Le A peut-être aussi, les traits verticaux étant petits il ne les prend pas en compte.*
- En tout cas pour le B ça marche ; pour le C il peut avoir repéré les traits des deux ellipses entières et les segments verticaux, ou bien le trait plein d'une ellipse et le trait plein d'une partie de l'autre et les deux segments verticaux.
- *Pour le D, c'est bizarre, peut-être c'est juste en se représentant la pyramide.*
- *Ou peut-être il a compté les cinq traits pleins et le trait en pointillés, comme ce trait est tout seul il est très visible, donc pris en compte.*
- Pour le E, on repère les 13 de la façon suivante : six traits pleins de l'hexagone, quatre segments verticaux, et les trois segments pleins de la face hexagonale du bas.

- Quelles remarques sur le repérage des faces ?
- *Pour les faces, le A est bon ; le B je ne vois pas ; le C est bon.*
- Le C, ou bien c'est en référence au solide, ou bien l'enfant dénombre les trois parties délimitées du dessin. Pour le D, peut-être il y a un mélange entre repérage de quatre parties pleines, et le rappel d'une face plane la base. Pour le E, c'est peut-être pareil, il y a 9 parties délimitées dans la figure. Mais on ne peut pas vraiment savoir.

Les stagiaires sont surpris de découvrir ces raisonnements, qui parfois peuvent aboutir à des réponses correctes. Ils semblent également découvrir que les enfants lisent les propriétés sur le dessin, et ne se réfèrent pas nécessairement aux propriétés du solide.

- Revenons à une question importante : quel était l'objectif du maître pour ce travail ?
- *Repérer les faces, les arêtes, les sommets sur un solide et savoir les dénombrer.*

- *Oui, et visiblement ce support de travail n'est pas adapté.*
- *En effet, si les enfants lisent sur le dessin !*
- *Il vaudrait mieux avoir un vrai solide, alors.*
- Oui, si les objectifs sont ceux indiqués, c'est en effet un travail sur le solide qu'il faut proposer, et non sur une représentation de celui-ci, qui visiblement nécessite d'autres compétences.
- *On peut aussi proposer un solide à la classe, que les élèves connaissent bien, mais le mettre loin des élèves, pour qu'ils fassent l'effort de se l'imaginer dans leur tête ou de faire intervenir ce qu'ils connaissent de lui.*
- Oui bien sûr, et c'est différent de mettre un solide à la disposition de l'élève qu'il peut manipuler dans un premier temps, ou ne plus manipuler ensuite, …

- Ainsi le travail sur les dessins nécessite certaines compétences de lecture de ces dessins ; quel travail est fait en classe sur cet aspect ? En général, rien de spécifique.
- *Mais finalement est-ce que c'est raisonnable que cela fasse partie des programmes ? Est-ce qu'il faut qu'on enseigne ça ?*
- D'abord, le travail sur les représentations en perspective de solides n'est pas mentionné dans les programmes actuels, mais cela reste une nécessité dans la mesure où souvent, et en particulier dans le travail en géométrie de l'espace au collège, beaucoup de représentations en perspective sont utilisées (de même d'ailleurs dans la vie courante).

- Nous allons faire une autre activité, et cela permettra de préciser les enjeux.

C'est un exercice proposé en 4$^{\text{ème}}$ au collège (annexe 5), que je vous demande de réaliser, nous allons voir en quoi il permet de mettre en évidence certains aspects fondamentaux liés au travail sur les représentations en perspective.

<u>Observations pour la question 1</u>

Après que tous les stagiaires ont commencé la reproduction du cube, j'indique qu'il y a un implicite dans la première question, tenant aux propriétés spécifiques de la perspective cavalière : l'angle des fuyantes par rapport à l'horizontale, et le rapport des longueurs sur les fuyantes ; ici c'est 45° et ½ , c'est important pour obtenir un schéma comme celui donné (et surtout pour avoir un dessin avec ces propriétés visuelles pièges, mais bien sûr je ne le précise pas aux stagiaires).

Une stagiaire après avoir reproduit l'ensemble du dessin, marque un angle droit en S pour le triangle RST (effectivement rectangle en S, mais on ne le sait pas). Je fais une première intervention individualisée pour lui demander si elle est sûre que ce triangle est bien un triangle rectangle.

- *Je ne sais pas.*
- Peut-être cette propriété que vous lisez sur le dessin n'est pas une propriété dans l'espace.

Construisez-vous un cube, essayez de repérer ce triangle et observez.

J'avais apporté du matériel « Polydrons évidés », permettant de construire des solides évidés.

Les stagiaires prennent du temps pour construire l'ensemble de la figure, j'avais imposé la construction sur papier blanc, et quelques uns d'entre eux font les constructions « à la règle et au compas ».

<u>Observations pour la question 3</u>

Pour ceux qui ont du mal à se représenter le triangle RDS, je leur apporte du matériel pour qu'ils se construisent un cube évidé. Ils positionnent alors bien les points et utilisent règle ou crayon pour matérialiser les côtés du triangle, non situés sur une arête du cube. Ils voient alors souvent rapidement le triangle RDS rectangle en D, mais restent plus perplexes pour la justification.

Exemples entendus de justification :

- *(DS) perpendiculaire à (AD) et si je fais pivoter (AD) dans le plan pour que A soit jusqu'en R, ça reste perpendiculaire.*
- *(DS) c'est perpendiculaire à la face (ARCD), donc c'est perpendiculaire.*
- *Les deux faces (DCHE) et (ABCD) sont perpendiculaires.*

Je rappelle collectivement deux éléments de géométrie permettant la justification.

« Si une droite est perpendiculaire à un plan, alors elle est perpendiculaire à n'importe quelle droite qu'elle coupe de ce plan ». Et je rappelle que « pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, il suffit qu'elle soit perpendiculaire à deux droites du plan ».

Cette dernière propriété est considérée comme évidente pour le cas des droites considérées ici.

- *On sait que telle arête est perpendiculaire à telle face, parce qu'on sait qu'on a un cube.*

<u>Observation pour la question 4</u>

- Pour le quadrilatère BHTU

Tous repèrent que BHTU est un parallélogramme. Ils utilisent comme argument le parallélisme et l'isométrie des cotés [UT] et [BH] (ou [UB] et [TH]). Je passe sous silence la justification des quatre points situés dans un même plan, pour ne pas surcharger la compréhension.

J'interviens (toujours individuellement) pour signaler que l'on peut dire plus sur ce parallélogramme.

Certains font un raisonnement utilisant la propriété précédente pour repérer que c'est un rectangle ; d'autres manipulent un cube évidé, et observent que BHTU est un rectangle.

- Pour le triangle TUR

La plupart considèrent que le triangle est rectangle en R, et cherchent à le montrer. Un stagiaire, ayant effectué son dessin sur quadrillage avec un angle de fuyante différent de 45°, visualise le triangle à peu près rectangle en R mais pas tout à fait. Il raisonne à partir du dessin, dans un premier temps pense que le triangle est rectangle en R, puis après comme l'angle n'est pas tout à fait droit, il se dit finalement non le triangle n'est pas rectangle en R.
J'interviens à chaque fois individuellement, au rythme de chacun, pour signaler qu'il faut faire attention, que les propriétés sur le dessin ne sont pas les mêmes que les propriétés dans l'espace sur le solide.

Par raisonnement, ou par manipulations sur le cube évidé, ils repèrent finalement l'angle droit en U. Ils sont très surpris en général de ce résultat.
Etonnés également que l'on donne ce genre d'exercice en $4^{\text{ème}}$. Ils trouvent cela difficile.
J'en profite pour dire que la nature de la difficulté est du même ordre que celle rencontrée en primaire. Par exemple comme sur le pavé (dessiné au tableau), on voit des parallélogrammes et pourtant les faces sont des rectangles. Les angles droits sur le solide sont traduits sur le dessin par des angles droits ou non suivant les faces.

<u>Observations pour la question 5</u>

Deux stagiaires ont construit le triangle RDA, en reportant la longueur [AD] prise sur le dessin. Je rappelle les différences de longueurs sur le dessin et sur le solide dans le cas général.
Le repérage de la longueur BH pose quelques problèmes pour ceux raisonnant avec les segments. Ils ne mettent pas en relation BH et la longueur d'une diagonale d'une face, que l'on peut prendre directement sur le dessin en considérant DH.
Ici, contrairement à précédemment, on peut faire une lecture sur le dessin, et avoir la même propriété.

- <u>Dans la synthèse, ce qu'il y aurait à retenir ?</u>
- *On est constamment entre le dessin et le solide.*
- *Il y a des propriétés sur le dessin qui correspondent à des propriétés sur le solide. Et parfois, qui ne correspondent pas.*

- La nécessité d'un apprentissage et certaines connaissances en jeu :

La déformation de la nature des faces ; les angles non conservés en général ; les longueurs non conservées en général.

Ce qui est régulier, ce sont les propriétés des faces parallèles au plan de projection, alors là on visualise la face de face, ... Mais en général, il y a des différences entre les propriétés d'un dessin de solide et les propriétés du solide.

- *On pourrait peut-être utiliser un projecteur pour voir comment les dessins se transforment et leurs propriétés changent, ...*

Pause (le travail précédent à duré environ 1h45)

Lecture d'un extrait du « projet de document d'application des programmes de l'école élémentaire », paru au BO n°7 du 26 août 1999 (appendice 2). Bien qu'abandonné depuis, il me paraît intéressant à considérer pour notre thème d'étude. Je demande donc aux stagiaires d'y repérer ce qui est dit concernant les représentations planes en perspective de solides.

> Au cycle 2
>
> Reconnaissance de solides usuels à partir de leur représentation (photo ou illustration opaque, les arêtes cachées n'étant pas dessinées). [...]
>
> Les élèves doivent savoir choisir un solide au milieu d'une collection, à partir de sa représentation plane sous forme de solide opaque. Mais il ne leur est pas demandé de savoir dessiner de telles représentations.
>
> Au cycle 3
>
> [...] observer les divers éléments qui composent une forme géométrique afin de pouvoir (entre autres) la recomposer à partir d'une représentation plane. [...]
>
> On passe des représentations des solides opaques (vus au cycle 2) aux représentations faisant apparaître les arêtes cachées. Au vu d'un dessin, on pourra demander aux élèves :
>
> - de choisir un solide parmi une collection de représentations planes,
> - de reconnaître des angles droits alors que le dessin plan les représente autrement,
> - de préciser la forme de certaines faces (faces carrées, rectangulaires, ...).
>
> Deux arêtes parallèles sur le solide sont toujours représentées par des segments parallèles. En revanche deux segments ou deux angles égaux sur le solide ne sont pas nécessairement égaux sur sa représentation plane.
>
> [...]

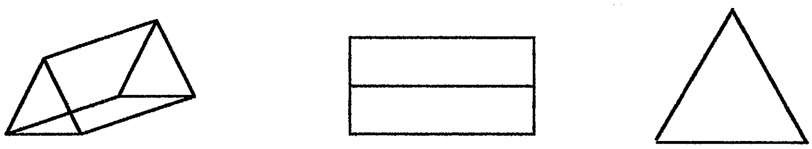
Au verso du polycopié, une proposition d'objectifs d'apprentissages pour l'école élémentaire, que je soumets également aux stagiaires.

Nous remarquons une grande précision concernant les aspects soulevés dans les travaux précédant la pause, avec un élément non abordé avant, la conservation du parallélisme.

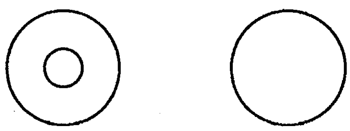
- *Est-ce que ce n'est pas toujours comme ça ?*

- Et non, il y a d'autres types de perspectives qui ne conservent pas le parallélisme. Par exemple la perspective qui correspond à la photographie, appelée perspective centrale, ou linéaire. Celle correspondant à la vision.

Je sors quelques photographies (appendice 3) d'un prisme à base triangulaire construit avec des tiges[1], donc évidé, pour visualiser la non conservation des longueurs et du parallélisme.
Je fais au tableau les dessins qui correspondraient à ceux obtenus à partir d'une perspective cavalière en considérant les mêmes points de vue (« oblique » ; face rectangulaire de face ; face triangulaire de face).



- *Mais alors la perspective cavalière ne traduit pas la réalité ? ! ! Moi je disais toujours à mes élèves que le pavé dessiné comme ça* (elle montre au tableau la représentation classique dessinée au cours de la séance), *je leur disais c'est comme on le voit si on le place d'une certaine façon.*
- Cela dépend de la taille des objets. Par exemple pour ceux construits avec le matériel, ce que l'on voit et le dessin obtenu avec une perspective cavalière est assez proche, pour ne pas faire de distinction. Mais par exemple pour des immeubles très hauts, si vous êtes situé en bas, vous voyez les bords comme ça (je montre avec mes mains / \ ). Cela dépend aussi de là où vous vous situez : par exemple un tube cylindrique que vous mettez à hauteur des yeux horizontalement, vous voyez les deux ouvertures circulaires l'une dans l'autre comme ça, alors que si vous vous placez beaucoup plus loin, vous verrez quasi confondues ces deux ouvertures. Le premier dessin correspondrait à une perspective centrale, et l'autre à une perspective cavalière.



- En fait, la perspective cavalière, correspond à un point de vue virtuel dans l'espace, comme si on était situé très très loin, à l'infini, ... c'est pourquoi dans cette perspective les droites parallèles sont toujours dessinées parallèles.
- *Mais est-ce qu'on doit faire la distinction avec les enfants, ça paraît un peu subtil et compliqué ?*

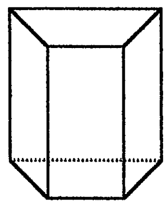
[1] Avec le matériel « Volumes à construire » édité par Nathan, tiges en plastique de trois longueurs différentes, et articulations souples en plastique pour les raccorder.

- Peut-être dans un premier temps on peut négliger cette distinction, surtout que pour des petits objets on voit *presque* comme en vrai, mais indiquez cependant, que cette forme de dessin est une convention, et qu'il en existe d'autres.
- *Pourquoi c'est celle-là qu'on choisit alors ?*
- *A quoi ça servait si ça ne représente pas la réalité ?*
- La perspective cavalière avec ses conventions, et ses caractéristiques (angle, et rapport de longueurs) permet de faire des mesures sur le dessin et donc d'avoir des informations que l'on peut traduire dans la réalité. Elle a surtout été utilisée dans les plans militaires, ou en architecture, pour à la fois donner une impression de réalité, et permettre de prendre des cotes pour effectuer des constructions. C'est elle qu'on a choisi de conserver en géométrie, car elle fait intervenir plus de notions de géométrie (les mesures des angles et des longueurs).

- Reprenons maintenant sur quelques propositions de travail avec les élèves.

Il y a l'idée de Dominique tout à l'heure, avec un projecteur, ou plus généralement une source lumineuse, et le travail sur les ombres.

Il y a également un travail possible avec des photographies de solides. Attention toutefois, je vous rappelle qu'une photo et plus généralement une image à elle seule ne permet pas de reconnaître un objet. Voici par exemple quelques photos (appendice 4a). A quels solides peuvent-elles correspondre ?
- *Une pyramide à base carrée, ou quand on assemble deux pyramides comme ça.*
- Un octaèdre régulier, oui avec huit faces triangles équilatéraux.
- *En plus on ne sait pas si ce sont des triangles équilatéraux ou des triangles isocèles.*
- *L'autre ça peut être un prisme à base hexagonale, ou bien juste une seule face derrière, et ça fait comme un toit.*
- Comme ça si je veux utiliser une autre image (dessin au tableau).
- *Oui.*
- Un prisme à base trapèze isocèle.

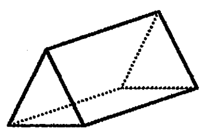


- On peut aussi prendre des photos de solides évidés, où on peut voir les arêtes, mais là encore il faudra faire attention à quelques cas limites pour lesquels on ne voit pas bien. Par exemple ceux-là (appendice 4b).

- Evidemment ce sont des cas limites, et le plus souvent, en acceptant un certain implicite et avec du bon sens, on peut travailler sur une photo « qui en dit suffisamment ».

Par exemple, prenons cette photo (appendice 5a) d'un prisme à base triangulaire, évidé, permettant ainsi de voir toutes ses arêtes ou parties d'arêtes.

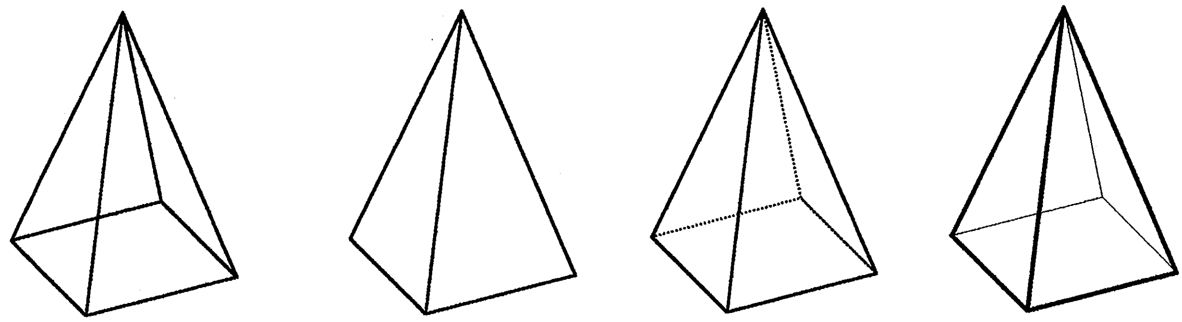
Au tableau je dessine une représentation plus classique, de ce genre de solide.



- [à propos de la photo] *Vous le voyez à droite ? ! ! Moi je le vois à gauche.*

Certains stagiaires voient en effet le prisme « partir vers la droite » et d'autres « partir vers la gauche ».
Je place le bord d'une feuille blanche verticalement passant par le sommet en premier plan du triangle, et je montre que le triangle du fond est plus à droite qu'à gauche.
La stagiaire ayant fait la remarque prend la photo et place le bord de la feuille blanche le long de l'arête en premier plan (des faces rectangulaires) et montre que le triangle du fond est plus à gauche qu'à droite.
Je prends alors une pochette plastique que je place sur la photo, pour repasser à la craie rouge les arêtes du solide, et place la pochette devant une feuille blanche pour bien faire ressortir le dessin.
- *Oui, c'est pas très net, mais là effectivement, sur le dessin, j'ai plus l'impression qu'il part à droite, que sur la photo.*
- Bon, de toutes façons il est normal que nous n'ayons pas les mêmes impressions optiques. Ce que cela nous apprend, c'est qu'il faut choisir au mieux les photos avec lesquelles on travaille, au mieux c'est à dire, avec le moins de confusion possible.

- Prenons par exemple cette photo (appendice 5b) de pyramide à base carrée, évidée, pour bien voir les arêtes du solide.
- *Ah oui, là ça va mieux.*
- Je vous rappelle que l'objectif du travail sur les représentations en perspective de solides, est l'apprentissage d'un passage entre les objets dans l'espace, solides, et les dessins que l'on utilise, ressemblant souvent à des dessins géométriques.
L'idée ici est de faire un passage par la photographie, image à plat du solide, mais pas complètement épurée, qui garde des liens de réalité, avec la réalité de l'objet. Simplement on est encore loin du dessin « géométrique ».
- *On peut faire comme tout à l'heure avec la pochette plastique.*
- Tout à fait, l'idée est d'utiliser un calque, positionné sur la photo, sur lequel on repasse les arêtes pour obtenir un dessin où n'apparaissent plus que des traits. Et utiliser une feuille blanche pour mettre ensuite en dessous pour bien visualiser le dessin, ou reporter directement sur une feuille blanche. On passe ainsi d'une image photo à une image dessin (D1).
On peut aussi ne repasser que les arêtes qui seraient visibles si le solide avait les faces pleines (D2).
On peut aussi différencier sur la photo les arêtes qui se trouvent « derrière », qui seraient cachées si le solide avait les faces pleines, de celles qui se trouverait visibles dans ce cas. On peut alors repasser les arêtes avec une convention de distinction entre ces deux types d'arêtes, introduire les pointillés, ou la distinction trait gras, traits fins. (D3 et D4)



D1 D2 D3 D4

Pour les explications précédentes, j'associe l'auditif au visuel, puisque j'ai préparé mon matériel identique à celui dont je parle, et en disant « on peut faire telle chose », je présente les feuilles de calque et feuilles blanches correspondantes, en format A4, superposables à la photo, ... pour une efficacité de « démonstration visuelle ».

- *Ce serait bien aussi d'avoir à disposition une photo du solide plein, pour mieux se rendre compte, quand on parle de l'hypothèse des faces pleines, pour distinguer arêtes visibles et non visibles.*
- *Ce serait bien aussi d'avoir le solide à côté pour aussi mieux voir au début, et aussi éviter les ambiguïtés de lecture, voir le solide, comme sur le dessin*
- *Au moins un solide en plein et un autre évidé.*
- Tout à fait, merci de compléter le dispositif.

- *C'est quand même bien d'avoir du matériel.*
- *Si on n'en a pas comment on fait ?*
- Les solides pleins, on peut les construire avec du bristol, faire des patrons, ou utiliser des emballages en les rendant neutres. Pour les squelettes de solides, on trouve en supermarché des petites baguettes de bois pour les brochettes, avec de la pâte à modeler pour les sommets cela fait l'affaire. En tout cas ici où il n'y a pas de grosses manipulations risquant de détériorer le matériel, il s'agit juste de l'avoir à disposition, et d'en avoir des photos.

- *En fait cela pourrait constituer une synthèse, les solides, les photos et les différents dessins que l'on a obtenus sur calques et sur feuilles blanches. Il pourrait y avoir tout sur une affiche de synthèse par exemple.*
- Oui, tout à fait, c'est une excellente idée.
- *Est-ce qu'on ne pourrait pas aussi mettre les gabarits des faces pour montrer que les faces du solide ont cette forme, et que cette forme n'est pas forcément la même sur les dessins ?*
- *On pourrait aussi les accrocher pour avoir un patron.*

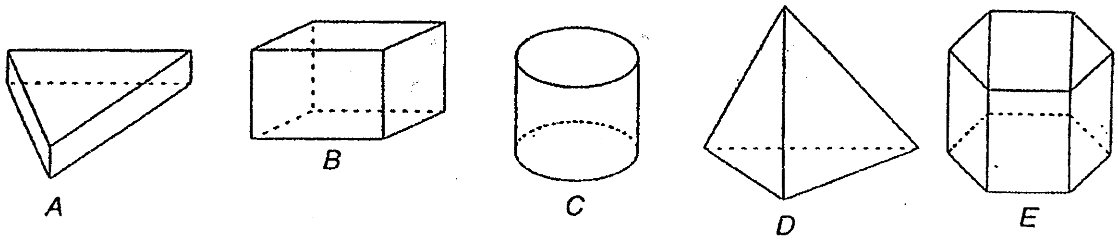
- Attention, peut-être vaut-il mieux rester sur un type de représentation particulière que sont les représentations en perspective. Car on a vu que les patrons sont aussi des dessins, possédant d'autres propriétés et relations avec les solides. Mais vous faites bien de rappeler qu'en fait pour les solides, on travaille essentiellement avec deux types de dessins de solides : les patrons et les représentations en perspective.

Cette partie depuis la pause a duré environ 1h.

CE2 ~~7~~ Jeudi 2 octobre 1997

Géométrie

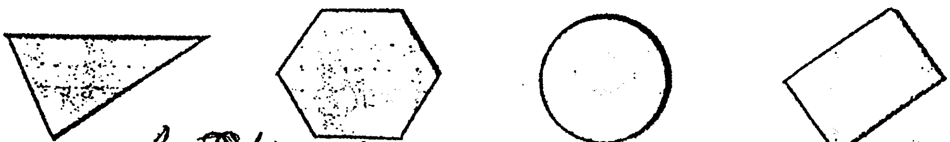
1. Observe ces solides.



• Complète le tableau.

solides	nombre de faces	nombre de sommets	nombre d'arêtes
A	5	6	~~6~~ 9
B	6 ~~5~~	8 ~~7~~	~~9~~ 12
C	3	0	~~4~~ 2
D	4 ~~5~~	4	6 6
E	8 ~~9~~	12 ~~10~~	~~13~~ 18

2. Parmi les solides de l'exercice 1, lesquels ont laissé ces empreintes dans la pâte à modeler ?



~~le D~~ le A le E ...... le C ...... le B ...

Extrait « Document d'application des programmes de l'école élémentaire », BO n°7, 26 août 1999.

Cycle 2

Initiation à la géométrie

Formes géométriques

• Classements de solides divers. Désignation de solides usuels (cubes, sphères, cylindres) et de quelques figures planes (carrés, rectangles, cercles).
• Reconnaissance de solides usuels à partir de leur représentation (photo ou illustration opaque, les arêtes cachées n'étant pas dessinées).

Le maître travaille d'abord sur des collections d'objets variés (y compris des objets naturels ou techniques) pour lesquels il propose aux élèves d'imaginer un classement. Différents critères peuvent être choisis par les élèves : la couleur, la taille, la matière utilisée…

Les activités de classement doivent amener les élèves à faire abstraction de ces divers aspects pour être capables d'identifier la forme géométrique. Dire qu'un gros cube en bois a la même forme qu'un petit cube bleu en plastique est une abstraction difficile pour certains enfants.

Les formes des faces pourront être observées à partir d'empreintes. Le maître fera remarquer que certains solides laissent toujours la même empreinte, quelle que soit la face posée.

Les élèves sont amenés à construire des solides (en pâte à modeler, jeux de construction géométrique…), à les assembler pour construire des formes plus complexes, à les couper pour observer les sections. Il ne faut pas hésiter à leur faire trouver des ressemblances dans la nature (un tronc d'arbre, c'est presque un cylindre…).

Les élèves doivent savoir choisir un solide au milieu d'une collection, à partir de sa représentation plane sous forme de solide opaque. Mais il ne leur est pas demandé de savoir dessiner de telles représentations.

Cycle 3

Initiation à la géométrie

• Identification des éléments géométriques des solides et des figures planes.
• Droites parallèles ; droites perpendiculaires.
• Reconnaissance de quelques objets géométriques usuels : aux solides vus au cycle 2 (cube, cylindre et sphère), on ajoute le pavé, le prisme et la pyramide ; en géométrie plane, on ajoute le losange et le triangle.
• Tracés géométriques à l'aide d'instruments (règle, règle graduée, équerre, compas, gabarit pour les angles), en particulier tracés de parallèles et de perpendiculaires. Reproduction de figures planes.
• Construction de patrons.
• Repérage dans le plan. Utilisation de quadrillages (pour lire une carte en géographie, pour reproduire des figures…).

Initiation à la géométrie des volumes

Au cycle 2, les élèves ont appris à dégager la notion de forme d'un objet en faisant abstraction de la taille, de la couleur, etc. Au cycle 3, il s'agit d'observer les divers éléments qui composent une forme géométrique afin de pouvoir la décrire, la reproduire et la recomposer mentalement à partir d'une représentation plane. Il devient donc nécessaire de savoir nommer les éléments géométriques usuels en utilisant un vocabulaire précis (face, sommet, arête, côté, segment, milieu, angle). Il convient également de faire identifier certaines propriétés telles que le parallélisme ou l'orthogonalité des arêtes (mais le parallélisme et l'orthogonalité des faces sont hors programme).

Au cycle 3, on passe des représentations des solides opaques (vus au cycle 2) aux représentations faisant apparaître les arêtes cachées. Au vu d'un dessin, on pourra demander aux élèves :
- de choisir un solide parmi une collection de représentations planes,
- de reconnaître des angles droits alors que le dessin plan les représente autrement,
- de préciser la forme de certaines faces (faces carrées, rectangulaires…).

Deux arêtes parallèles sur le solide sont toujours représentées par des segments parallèles. En revanche deux segments ou deux angles égaux sur le solide ne sont pas nécessairement égaux sur sa représentation plane.

L'élève apprend à dessiner les patrons associés à un cube, à un pavé ou à une pyramide régulière donnés et à reconstituer ces solides à partir des patrons.

Les formes qui nous entourent et que les élèves utilisent dans d'autres disciplines sont des objets et non des dessins plans. En sciences et en technologie, il arrive de s'interroger sur la symétrie d'un animal ou sur la répétition "en tournant" d'un motif (fleurs, étoile de mer, lustre à cinq branches…). C'est pourquoi le programme de mathématiques aborde ces notions à propos des solides.

Les solides et leurs représentations planes
Quelques pistes de travail

Des objectifs généraux à long terme

Constituer un bagage suffisant d'expériences liées au travail sur les représentations planes d'objets de l'espace, bagage non réduit à la connaissance de représentations stéréotypées, et améliorer les compétences, connaissances et savoirs des élèves :
- *pour la lecture de représentations planes d'objets de l'espace*

capacité à accorder une valeur spatiale aux dessins, à envisager la profondeur (le relief)
capacité à décoder les conventions (semi-transparence, opacité, pointillés ...)
- *pour la production de représentations*

dans le cadre de la résolution de problème, un dessin pour soi, à main levée (relève plutôt du collège)
- *pour la capacité à changer de point de vue sur un objet*
- *pour le développement de représentations mentales d'objets de l'espace*

Des objectifs à plus court terme (qui peuvent être travaillés en atelier professionnel)

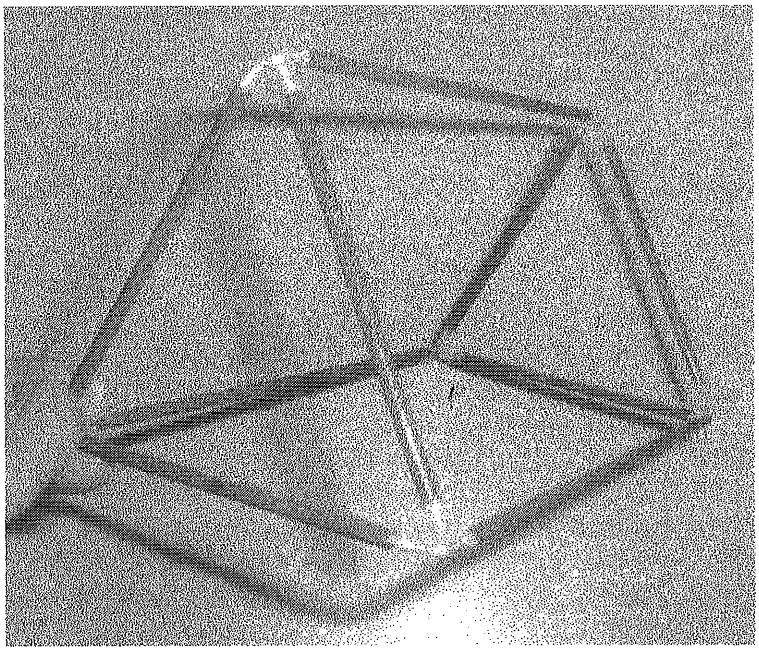
Prendre conscience du lien entre représentation et point de vue
Une représentation en perspective définit (ou est définie) plus ou moins (par) un endroit dans l'espace d'où l'on voit l'objet « comme » sur la représentation.
Dit autrement, la représentation correspond (à peu près) à ce que l'on voit des lignes du solides ramenées à un plan.

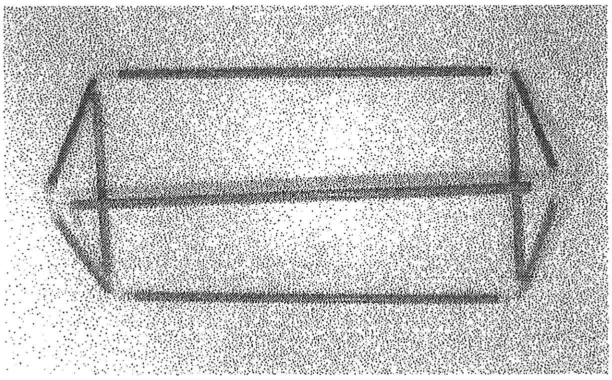
Travailler sur la mise en place des conventions liées aux arêtes cachées.
Les arêtes cachées à la vue pour un solide opaque peuvent être représentées en trait pleins, ou en traits pointillés.
(en début de cycle trois)

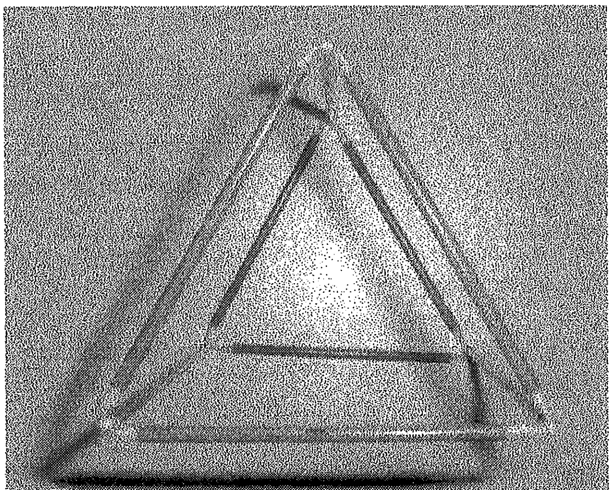
Repérer les différences de propriétés entre le solide et ses représentations planes.
- ♦ Pour ce qui concerne les patrons, voir le document spécifique.
- ♦ Pour les représentations en perspective :
- Toutes les faces et arêtes ne sont pas nécessairement représentées.
- Les faces du solide ne conservent pas toutes leur forme sur le dessin. Pour un pavé par exemple certaines faces rectangulaires sur le solide sont représentées par des parallélogrammes.
- Les angles droits sur le solide ne sont pas forcément droit sur le dessin.
- Les arêtes parallèles sur le solide sont toujours représentées parallèles sur le dessin (attention, ceci n'est valable que pour les représentations en perspective cavalière)
- les longueurs des arêtes ne sont pas toutes conservées sur le dessin ; mais des arêtes parallèles de même longueur sur le solide ont même longueur sur le dessin.

(les deux derniers points relèvent plutôt d'une étude en fin de cycle trois, et au collège)

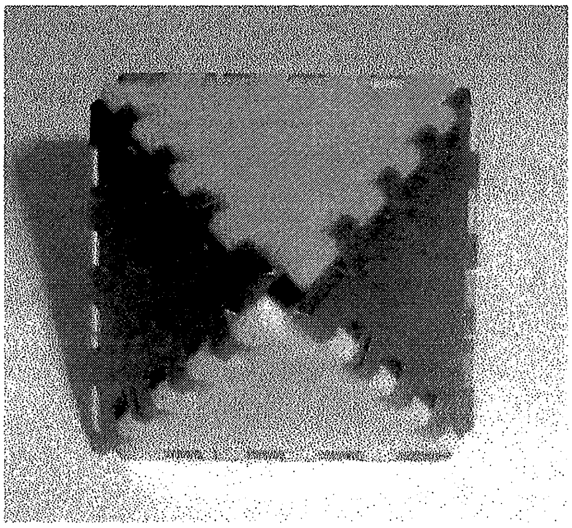
Travailler sur la multiplicité des points de vue sur un même objet, et donc la multiplicité des représentations.
Certaines étant plus pertinentes que d'autres pour visualiser certaines propriétés du solide.
Certaines étant insuffisantes pour rendre compte de l'allure générale du solide, et pouvoir le reconnaître.

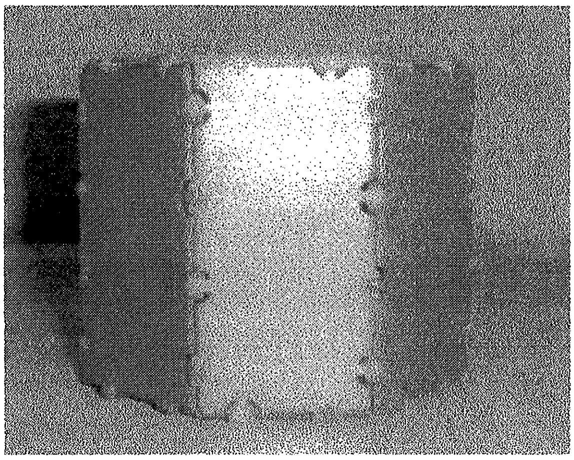




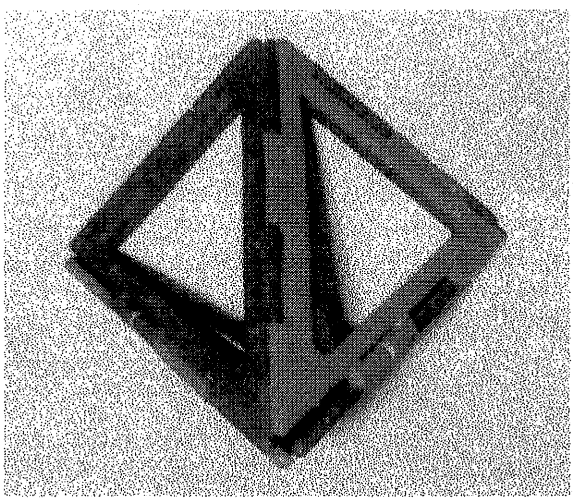


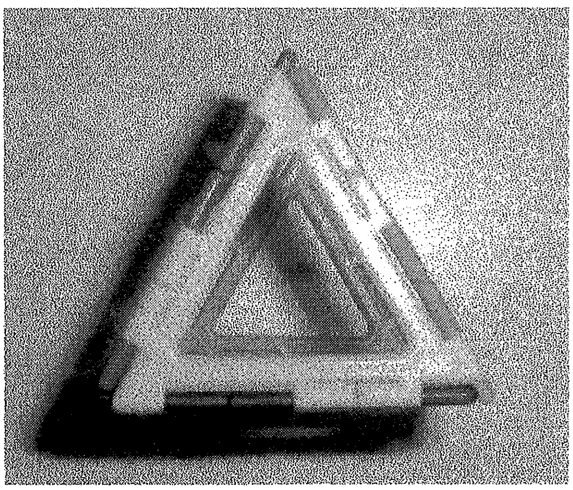
4a



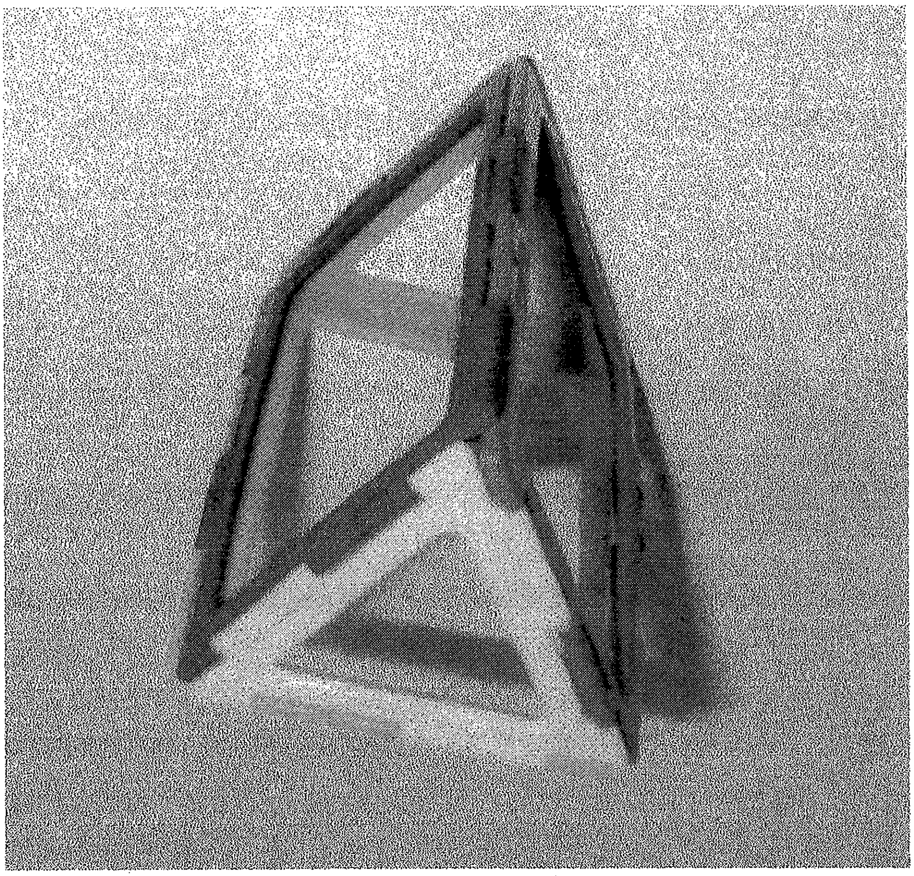


4b

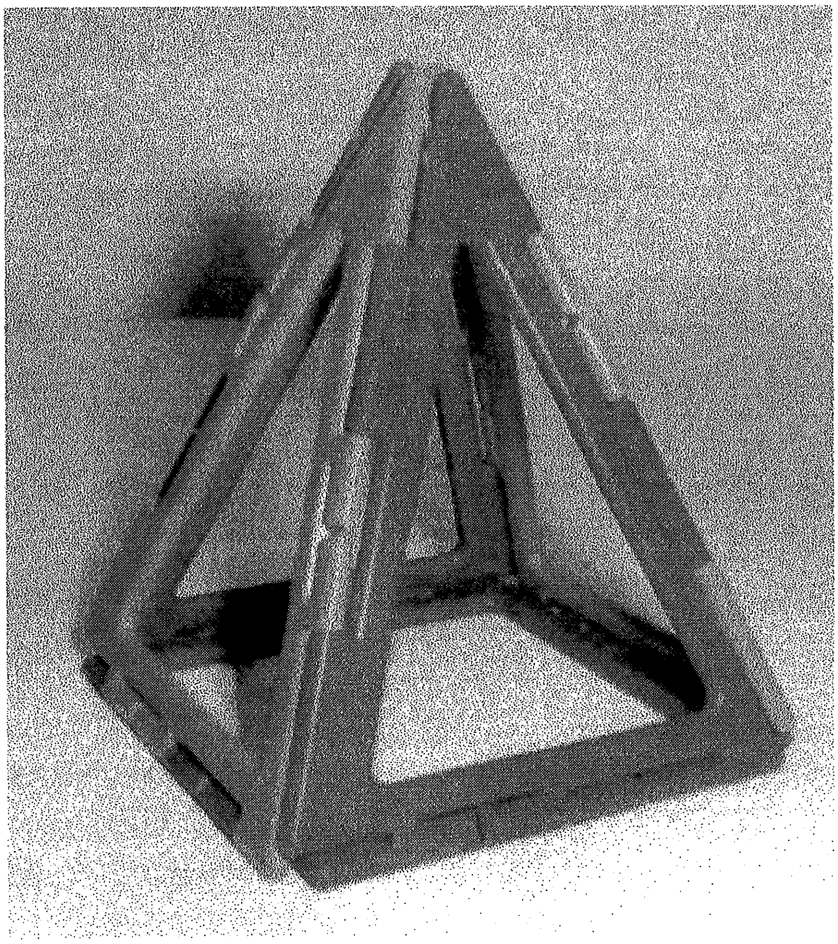




5a



5b



1a

Feuille 3.

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 5cm. $ABCD$ est une face, les arêtes $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$ sont parallèles.

P est le point de l'arête $[EF]$ tel que $FP = 3cm$,

Q est le point de l'arête $[GF]$ tel que $FQ = 1cm$,

R est le point de l'arête $[BF]$ tel que $FR = 2cm$.

On « coupe » le cube suivant le plan (PQR), dessiner sur la maquette et en vraie grandeur sur la feuille la **section plane** du cube.

Indiquer sur la feuille la démarche suivie pour le dessin sur l'objet et le dessin en vraie grandeur.

Terminer en représentant, sur chaque dessin en perspective parallèle ci-dessous, la section obtenue. Nommer avec soin les sommets du cube, ainsi que les sommets de la section.

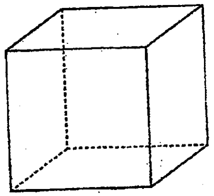


Figure III 3-1.

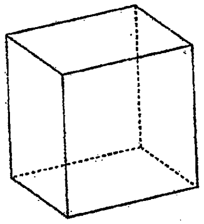


Figure III 3-2.

La figure III 1. est une projection parallèle sur un plan parallèle à une face, l'angle des fuyantes est de 35° et le coefficient de réduction de 1/2. Cette représentation figure dans toutes les feuilles sous les codes « Figure III n-1 ».

La figure III 2. est une projection sur un plan parallèle aux arêtes « verticales », aucune autre caractéristique particulière n'a été retenue. La projection d'un « coin du cube » [*Audibert*, 1985] permet de calculer les angles que font les arêtes et la direction de projection avec le plan de projection. Mais cela ne donne aucune indication supplémentaire quant au problème posé. Seule la conservation des proportions sur des directions parallèles est utile pour les représentations demandées.

Les élèves n'ayant pas eu, à ce moment de l'apprentissage, de cours sur les représentations en perspectives parallèles les indications données précédemment ne leur sont pas communiquées, mais ils savent que ces projections conservent certaines longueurs et ils repèrent facilement les arêtes en vraie grandeur qui dans les feuilles que nous leur avons données mesuraient, comme celles de la maquette : 5cm

Feuille 4.

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 5cm. $ABCD$ est une face, les arêtes $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$ sont parallèles.

P est le point de l'arête $[AE]$ tel que $AP = 3cm$,

Q est le point de l'arête $[BF]$ tel que $BQ = 1cm$,

R est le point de l'arête $[CG]$ tel que $CR = 2cm$.

On « coupe » le cube suivant le plan (PQR), dessiner sur la maquette et en vraie grandeur sur la feuille la **section plane** du cube.

Indiquer sur la feuille la démarche suivie pour le dessin sur l'objet et le dessin en vraie grandeur.

Terminer en représentant, sur chaque dessin en perspective parallèle ci-dessous, la section obtenue. Nommer avec soin les sommets du cube, ainsi que les sommets de la section.

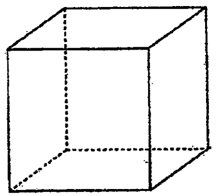


Figure III 4-1.

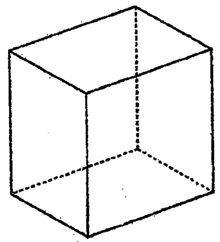


Figure III 4-2.

La figure III 4-2. est une projection sur un plan parallèle à un plan diagonal, les fuyantes font un angle de 60° et le coefficient de réduction est de 1/2. Cette représentation a l'avantage, pour un codage astucieux des sommets, de donner en vraie grandeur le rectangle diagonal utile.

Feuille 5.

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 5cm. $ABCD$ est une face, les arêtes $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$ sont parallèles.
P est le point de l'arête $[FG]$ tel que $FP = 4cm$,
Q est le point de l'arête $[FE]$ tel que $FQ = 3cm$,
R est le point de l'arête $[AB]$ tel que $BR = 2cm$.

On « coupe » le cube suivant le plan (PQR), dessiner sur la maquette et en vraie grandeur sur la feuille la **section plane** du cube.

Indiquer sur la feuille la démarche suivie pour le dessin sur l'objet et le dessin en vraie grandeur.

Terminer en représentant, sur chaque dessin en perspective parallèle ci-dessous, la section obtenue. Nommer avec soin les sommets du cube, ainsi que les sommets de la section.

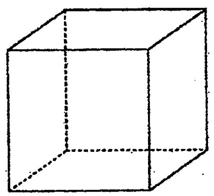


Figure III 5-1.

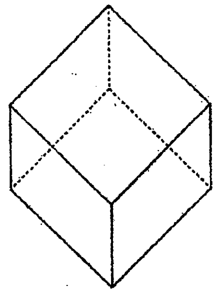


Figure III 5-2.

La figure III 5-2. est une projection parallèle sur un plan parallèle à une face, la direction des fuyantes est verticale et le coefficient de réduction est de $3/5$.

Feuille 6.

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 5cm. $ABCD$ est une face, les arêtes $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$ sont parallèles.
P est le point de l'arête $[AE]$ tel que $AP = 4cm$,
Q est le point de l'arête $[BF]$ tel que $BQ = 1cm$,
R est le point de l'arête $[CG]$ tel que $CR = 3cm$.

On « coupe » le cube suivant le plan (PQR), dessiner sur la maquette et en vraie grandeur sur la feuille la **section plane** du cube.

Indiquer sur la feuille la démarche suivie pour le dessin sur l'objet et le dessin en vraie grandeur.

Terminer en représentant, sur chaque dessin en perspective parallèle ci-dessous, la section obtenue. Nommer avec soin les sommets du cube, ainsi que les sommets de la section.

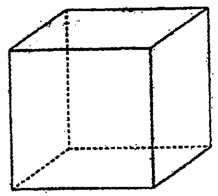


Figure III 6-1.

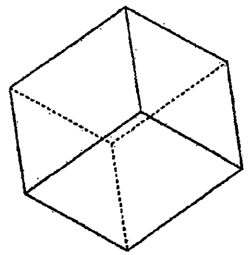


Figure III 6-2.

La figure III 5-2. est une projection parallèle sur un plan diagonal, l'angle des fuyantes est de 30° et le coefficient de réduction est de 1/2.

Feuille 7.

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 5cm. $ABCD$ est une face, les arêtes $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$ sont parallèles.
P est le point de l'arête $[AE]$ tel que $AP = 4cm$,
Q est le point de l'arête $[AB]$ tel que $AQ = 3,5cm$,
R est le point de l'arête $[BC]$ tel que $BR = 2cm$.

On « coupe » le cube suivant le plan (PQR), dessiner sur la maquette et en vraie grandeur sur la feuille la section plane du cube.

Indiquer sur la feuille la démarche suivie pour le dessin sur l'objet et le dessin en vraie grandeur.

Terminer en représentant, sur chaque dessin en perspective parallèle ci-dessous, la section obtenue. Nommer avec soin les sommets du cube, ainsi que les sommets de la section.

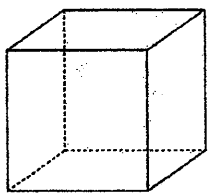


Figure III 7-1.

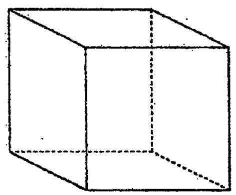
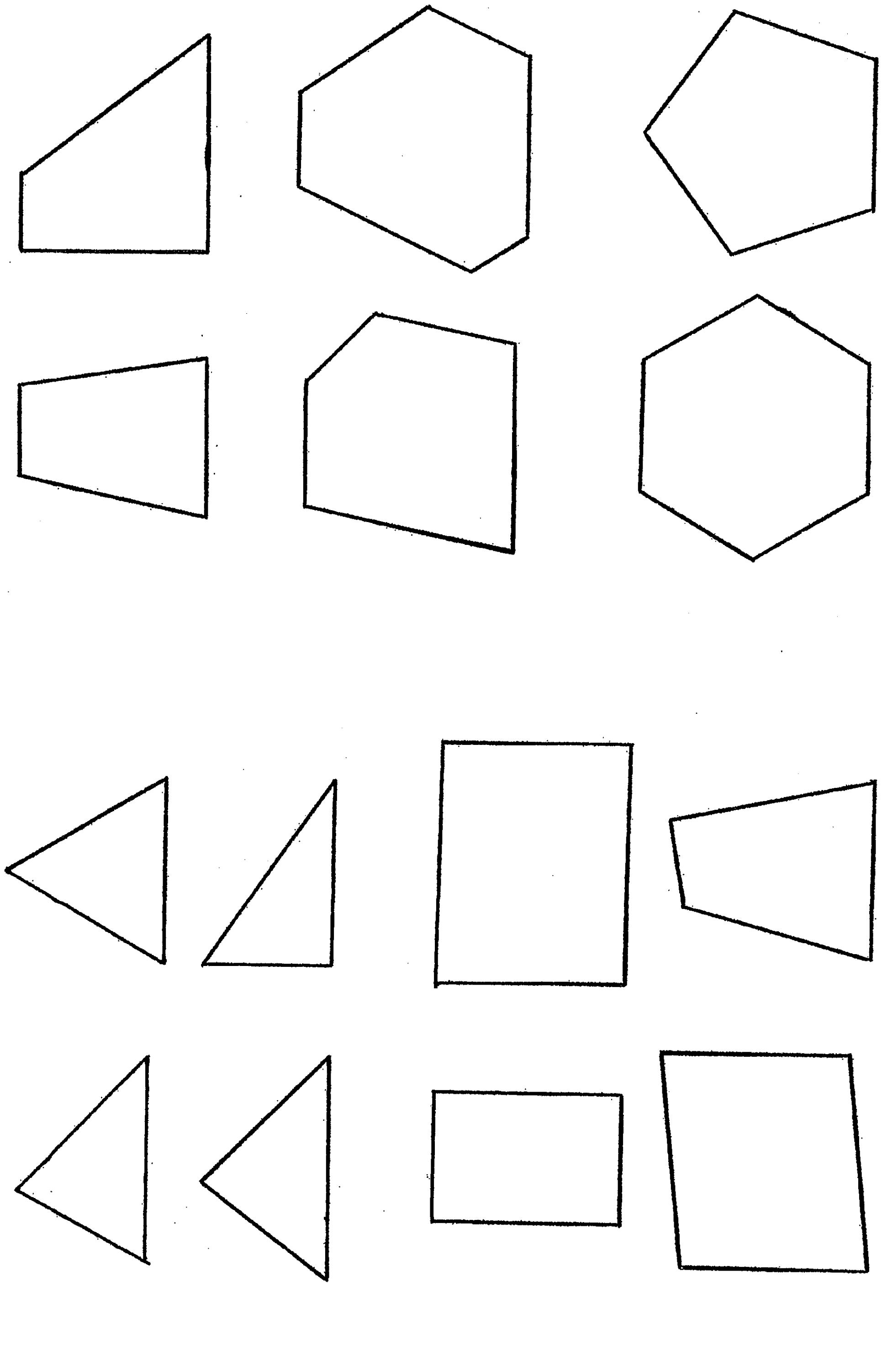


Figure III 7-2.

La figure III 5-2. est une projection parallèle sur un plan parallèle à une face, l'angle des fuyantes est de 153° et le coefficient de réduction est de 3/5.

1b



Entretien avec François COLMEZ
Equipe DIDIREM, IREM de Paris 7
mardi 12 mai 1998

En réponse à une question posée sur ses activités menées dans le cadre scolaire autour de la géométrie de l'espace.
(en gras c'est nous qui soulignons)

A propos du volume

Concernant la géométrie de l'espace à l'école élémentaire, j'ai surtout travaillé sur le volume des parallélépipèdes.
D'abord en faisant des assemblages, réguliers ou non réguliers, avec des blocs multi-bases ; il s'agissait de considérer le volume au sens de volume encombrement. Parce qu'il y a aussi le volume au sens capacité, que l'on traitait plutôt avec de l'eau, des récipients ...
Il s'agit de faire le lien entre les deux, ce n'est pas tout à fait évident. Les élèves ont besoin de découvrir, de savoir, que l'on peut fort bien obtenir le volume d'un objet en le trempant dans l'eau et en regardant quelle est la quantité d'eau qu'il remplace.
A posteriori, je pense que l'on a intérêt à déjà commencer à l'école élémentaire ce genre de travail.
Demander aux élèves par exemple comment ils peuvent déterminer quel est leur volume, à eux ; quand ils prennent un bain comment ils peuvent faire, ... ou peut-être avant commencer par des objets, ...

Ce qu'il y a d'intéressant avec les enfants de l'école élémentaire, c'est qu'ils sont prêts à expérimenter toutes sortes de protocoles expérimentaux. Ils entrent dans le jeu très facilement.

J'ai beaucoup travaillé sur la mesure avec eux, et ils inventent des tas de choses.
Par exemple pour comparer des volumes de bouteilles : ils disposaient uniquement de bouteilles et d'un seau d'eau, ils avaient imaginé de mettre les bouteilles dans l'eau en même temps et de dire « celle qui est remplie la première et bien c'est la plus petite ». Bien sûr d'autres enfants ont émis des objections « ça dépend de la taille du goulot, ... ».
Ils prennent en compte énormément de paramètres et on peut les faire raisonner sur leurs propositions.

Le volume peut être envisagé en tant que grandeur à une dimension : c'est le volume "capacité", on ne tient pas compte de la forme. Il peut également être envisagé en tant que grandeur tridimensionnelle. Et il y a aussi tout un travail à faire autour cet aspect ci.

Par exemple, pour des élèves de troisième, il n'est pas encore évident que lorsqu'on double, ou on triple ou on multiplie par k la longueur d'une arête d'un cube, le volume du cube sera multiplié par k^3.
D'ailleurs il ne faudrait pas seulement faire intervenir les homothéties, mais faire un travail plus général par les affinités. On change une des dimensions sans changer les autres, et puis on en change deux, et puis trois, et on les change avec des coefficients différents ...
L'agrandissement des arêtes suivant les trois dimensions, par un même coefficient n'est qu'un cas particulier de ce qui précède.
Même si, ou une fois que, ce phénomène est bien pris en compte par les élèves, beaucoup de difficultés persistent pour les solides de surfaces sphériques ; il faut reprendre une partie du raisonnement.
Ici, l'utilisation du matériel pâte à modeler peut aider à la compréhension. On construit un cube en pâte à modeler, puis on roule la pâte de façon à obtenir une sphère. Le cube initial et la sphère ont même volume.
On peut supposer que les élèves de troisième ont acquis la conservation du volume, par contre cette expérience ne fonctionnerait pas avec des élèves de cours préparatoire qui ont encore des doutes sur cette question.
Ainsi, une sphère de rayon double, construite à l'identique à partir d'un cube d'arête double, aura un volume huit fois plus grand que la "petite" sphère précédente.
Or les élèves ont beaucoup de mal à se persuader de ce phénomène. Et même s'ils l'ont déjà étudié sur le cube, cela leur semble très surprenant, car peut-être contraire à une intuition.
D'ailleurs c'est tellement surprenant qu'il y a des gens qui laissent leur bébé se déshydrater dans une voiture sans penser qu'un bébé ça se déshydrate quand même au moins trois fois plus vite qu'un adulte (c'était l'exemple que je prenais avec les normaliens, pour leur faire prendre conscience du problème).

Dans cette situation les manipulations sont fondamentales. Et on a besoin de les effectuer, au départ pour se construire des représentations du phénomène. On peut par la suite les évoquer, toutefois la présence du matériel est parfois nécessaire même si on ne fait pas les manipulations.

Manipulation, Représentation

Les élèves de l'école élémentaire avec lesquels j'ai travaillé sur le volume (capacité) montraient encore beaucoup de naïveté dans leurs représentations. Ils étaient capables de bien manipuler avec des récipients, de comparer, de transvaser et puis de prendre un récipient comme unité pour comparer les autres, ... mais quand ils réalisaient un dessin (on leur demandait de faire des affiches pour expliquer leurs expérimentations), et bien, s'ils représentaient une bouteille penchée, ils dessinaient quand même le niveau d'eau perpendiculaire à l'axe de la bouteille, et non pas horizontal. Et même quelque-fois, quand ils mettaient la bouteille à l'envers ils mettaient le liquide en haut ...

Les élèves lorsqu'ils manipulent ou qu'ils représentent, ne sont pas dans le même registre de représentations mentales. Quand ils sont en train de manipuler, ils ne font pas attention à des éléments qui seront à prendre en compte dans les représentations.

La manipulation est indispensable comme référence, pour donner du sens à ce que l'on va faire, mais souvent elle est insuffisante pour permettre aux élèves de prendre conscience d'éléments implicites en jeu dans la manipulation.

Ce genre de difficultés nous a fait penser avec B. Parzysz que si nous voulions faire de la géométrie de l'espace d'une manière intéressante avec les élèves, il fallait jouer justement sur la représentation.
En effet, il y a des propriétés qui sont extrêmement simples et évidentes quand on a l'objet dans la main, quand on le regarde, et tellement évidentes qu'on ne va même pas en parler, elles restent implicites.
Or lorsqu'on est amené à transférer ces éléments sur une représentation dans le plan, on est obligé de les dire explicitement, de les prendre en compte explicitement, même les propriétés les plus évidentes. Et la représentation des propriétés évidentes n'est pas évidente.

J'aurais envie de baptiser ça *un jeu de cadres* : où les choses sont vraiment très différentes d'un cadre à l'autre ; où quelque chose qui est évident dans un cadre ne l'est plus du tout dans l'autre cadre. Cette articulation, il me semble, participe à la construction d'un concept.

J'ai travaillé avec des élèves de cinquième sur cette question (cf. « *Un rideau dans une pyramide* »[1])
Dans cette situation le problème est de prendre en compte le fait que lorsqu'on passe de l'espace au plan certaines propriétés sont conservées telles qu'elles, et d'autres sont transformées, elles ne se conservent pas. Il s'agit de se demander ce qu'elles deviennent puisqu'elles ne se conservent pas ; elles sont transformées : comment sont-elles transformées ?
La perpendicularité par exemple, est une de ces propriétés fondamentales que les élèves ont du mal à traduire dans les représentations planes.
Pour essayer de respecter l'orthogonalité ils vont en oublier les propriétés d'incidence. Ils traceront une droite qui ne passe pas par les points par lesquels elle devrait passer, mais elle sera bien perpendiculaire à celle qu'ils voulaient. La prégnance de la perpendicularité est

[1] Voir document *Dessins de maquettes et enseignement de la géométrie au collège*, F. Colmez.

particulièrement importante quand il s'agit de directions horizontales et verticales. Sur un dessin en cours de réalisation ou à compléter, certains élèves traceront les verticales perpendiculaires aux segments dont la direction est la plus proche des bords de la feuille.

Articulation perspective centrale, perspective cavalière

Avec B. Parzysz, nous avions proposé au niveau de la classe de première, une situation à partir de l'ombre au soleil, de façon à travailler la projection parallèle.
Et puis Bernard a eu un doute, et nous avons commencé l'année suivante par l'ombre au flambeau (cf. sa thèse). Par la suite seulement il a posé aux élèves la question de savoir s'il était possible d'avoir une conservation du milieu pour n'importe quel segment et de ce fait nous avons introduit la projection parallèle. Nous leur avons demandé s'ils connaissaient un phénomène naturel qui donnait des projections parallèles et ils ont pensé au soleil à ce moment là ; évidemment avec une petite approximation étant donné que le diamètre apparent du soleil est quand même de un demi degré, mais enfin ce n'est pas très gênant.
Ce qui est plus gênant c'est l'absence de soleil sous nos latitudes : j'avais voulu faire un travail de repérage de la position du soleil débouchant peut-être sur un gnomon, mais j'ai dû y renoncer.

Je pense qu'il faut montrer non pas le caractère conventionnel, mais plutôt le caractère artificiel de la perspective cavalière, perspective utile en mathématiques.
Elle est simple, c'est une transformation affine, alors que la perspective ordinaire est une transformation projective, non affine, dans laquelle on peut faire toutes les constructions que l'on veut, mais c'est bien plus compliqué. Elle permet des réalisations que l'on peut proposer plutôt à la fin du lycée qu'au niveau de la sixième.

Cependant en classe de sixième, j'ai travaillé à partir de dessins censés représenter des photographies d'une boîte ; une boîte que l'on avait photographiée plusieurs fois en s'éloignant. J'avais travaillé mes dessins pour avoir vraiment l'impression de l'éloignement, mais de telle sorte que la face avant ait toujours la même taille[2].
Ceci a permis de montrer que lorsqu'on était très près, il y avait une forte convergence des parallèles et puis au fur et à mesure que l'on s'éloignait, elles devenaient sur le dessin effectivement parallèles.
Ainsi les élèves ont pu observer et formuler le fait suivant : si on est suffisamment loin les droites qui sont parallèles dans l'espace vont avoir des dessins parallèles.

---

[2] Ultérieurement, la séance a été reprise à partir d'un montage de photos *réelles* d'une boîte de sucre en morceaux, montré aux élèves, et ils disposaient d'une feuille des dessins obtenus en décalquant les arêtes des boîtes photographiées. Ceci par souci de garantir l'authenticité.

(Bien sûr, quand on est à trois mètres d'une boîte de quelques centimètres il y a peu de différence entre une projection conique et une projection cylindrique.)

Parallélisme dans l'espace

A propos de parallélisme, c'est plus ou moins une notion première pour les élèves, même dans l'espace. Il y a des moyens de leur faire prendre conscience des conditions pour que deux droites soient parallèles.

Voici une situation que j'ai expérimentée dans des classes de différents niveaux. J'ai réalisé cette situation à différentes échelles avec des élèves d'âges différents : avec les plus jeunes il vaut mieux travailler à une grande échelle ; avec les plus grands on peut passer à une échelle plus petite.
On tend un fil entre un mur et le sol, ou entre deux planches de bois fixées perpendiculairement. Un autre fil est fixé au sol par une extrémité et on veut fixer l'autre extrémité au mur pour qu'il soit parallèle au premier.
Un moyen de contrôle proposé par les élèves : il y a un endroit où on ne doit voir qu'un seul fil.
Autrement dit ils prennent conscience que deux droites parallèles doivent être dans un même plan.
Puis, si cette condition est réalisée il faut qu'en même temps elles aient l'air parallèles quand on les regarde autrement, et puis finalement qu'elles aient l'air parallèles quelle que soit la direction dans laquelle on les regarde.
Si elles sont bien dans un même plan et qu'elles ont l'air parallèles quand on les regarde d'une autre manière, alors elles restent parallèles dans toutes les directions.
Cette simple manipulation là permet de prendre conscience de ce que sont deux droites parallèles dans l'espace.
On peut *ensuite* la traduire en termes géométriques et on aboutit à une définition habituelle des droites parallèles. Mais c'est quelque chose que les élèves ont besoin de construire, et si une définition est donnée a priori, cela ne sert à rien.

C'est surtout vrai avec les enfants les plus petits, ils ont une autonomie bien plus considérable que les plus grands, on ne leur impose rien. Et pour qu'ils prennent conscience d'un phénomène, qu'ils l'acceptent intellectuellement, il n'y a pas d'argument d'autorité qui joue. Ils ont besoin de découvrir et de construire par eux-mêmes.

Perpendicularité dans l'espace

Deux segments de droites ayant une extrémité commune, perpendiculaires, c'est quelque chose que les élèves voient bien.
Par contre il y a un travail à faire à propos du théorème des trois perpendiculaires : pour qu'une droite soit perpendiculaire à toutes les droites d'un plan, il faut et il suffit qu'elle soit perpendiculaire à deux d'entre elles.
Cela n'est pas tout à fait évident, même au niveau de la troisième.

Par exemple on demande à un élève de placer un bâton perpendiculairement à un plan ; il va demander une équerre, et il va tourner l'équerre jusqu'au moment où elle, elle "aura l'air" perpendiculaire au plan.

Au collège, j'ai proposé plusieurs fois le problème suivant, pour lequel les élèves disposent d'une maquette : comment dresser un mât vertical au centre d'une piste circulaire, avec quatre câbles fixés à une extrémité du mât, et que l'on veut également fixer au sol ?
Une solution est d'obtenir deux triangles isocèles dans deux plans sécants, sécants selon le mât.
Ceci est assez probant pour les élèves. Au niveau de la troisième les élèves peuvent établir des justifications, puisqu'ils disposent du théorème de Pythagore.

La perpendicularité les élèves la voient bien. C'est le problème de la représentation de la perpendicularité qui pour eux est très difficile parce qu'ils ont envie que toutes les droites qui sont perpendiculaires dans l'espace le soient sur le dessin et ils s'aperçoivent que ce n'est pas possible. On peut en représenter certaines, mais lesquelles et dans quel cas peut-on les représenter ?
Des manipulations avec une équerre que l'on fait tourner, et que l'on projette sur le plan horizontal, sont possibles. On regarde dans quel cas les droites projetées sont perpendiculaires ....
Il y a toutes sortes de manipulations à faire, et qui peuvent se faire certainement très tôt.

Droites et plans dans l'espace

Il y a une manipulation que j'ai faite en sixième et qui peut certainement se faire plus tôt, une manipulation qui essaie de faire prendre conscience du sens du mot droite ou du mot plan dans le modèle mathématique, dans le discours mathématique par rapport aux objets.

J'avais fixé sur un pied photo avec une rotule, une planchette. Celle-ci pouvait être horizontale, mais le problème était de déterminer des moyens d'être sûr que la planchette est bien horizontale.
La meilleure possibilité c'est encore la bille : si la bille roule, c'est qu'il y a une pente.

On fixe la planchette et puis on regarde, on met la bille à différents endroits, puis on essaye de repérer son mouvement, ...
Il y a tout un protocole expérimental à mettre en œuvre avec les élèves.
En particulier, si on lâche la bille à un endroit déterminé, on n'a pas le temps de la voir ; il faut donc qu'il y ait un élève qui soit là, attentif à regarder à quel moment elle sort du bord de la planchette, et pointer l'endroit où elle sort. L'observation est reprise, pour être sûr de la position de ce point, les élèves peuvent alors dessiner la droite, trace du mouvement de la bille sur la planchette (j'avais mis une sorte de Formica, on pouvait donc dessiner, effacer...). L'expérience est reprise plusieurs fois, avec d'autres positions initiales pour la bille.
Finalement les élèves s'apercevaient que toutes les droites tracées étaient parallèles.

Dans une seconde étape, on place une règle un peu épaisse sur la planchette et on pose la bille le long de la règle. Quand la règle est bien orientée la bille ne tombe pas, c'est à dire quand la règle est horizontale.
En traçant la droite correspondant à cette position de la règle, les élèves s'aperçoivent que les angles formés par cette droite et les droites tracées dans la première étape, ces angles sont des angles droits.
Ensuite on peut considérer l'intersection du plan de la planchette et d'un plan vertical, et faire tourner celui-ci. Il est alors possible d'observer différentes pentes sur la planchette. En particulier une pente nulle, c'est la direction horizontale, la bille ne part pas ; et une pente maximum, la direction repérée dans la première étape, la bille part dans la direction de plus grande pente. (En fait dans ces manipulations, il n'est pas facile de repérer les pentes ; plus facile est le repérage des angles avec la verticale ...)

Ces manipulations sont peut-être un peu compliquées pour des enfants plus jeunes, mais au niveau de la sixième cela permet de faire intervenir un certain nombre d'objets géométriques du plan. **A chaque fois, les élèves sont amenés à travailler dans des plans successifs, à manipuler des objets matériels et géométriques dans des circonstances où ils n'ont pas l'habitude de les manipuler.**

Par contre voici une autre situation qui est certainement réalisable avec des élèves plus jeunes : on place la planchette dans une position en biais ; le plan de la planchette et le plan du plancher doivent forcément se rencontrer, comment peut-on faire pour trouver où ils se rencontrent ?
Les élèves peuvent utiliser les visées : quelqu'un se met de façon à voir la planchette comme un trait, puis il regarde et indique l'endroit du plancher qu'il voit.

Une autre manipulation est possible, sans doute plus efficace par rapport aux objectifs. On fixe une ficelle en haut de la planchette, puis un élève va promener l'autre extrémité sur le

plancher, de façon que la ficelle soit tendue. S'il descend trop la ficelle, elle "fait un angle" ; s'il la lève trop, elle ne touche pas la planchette. Il y a donc une position où la ficelle est exactement dans le prolongement de la planchette. Pour cette position un autre élève dispose une trace au sol (j'avais pris des bouchons de bouteilles d'eau) pour repérer l'intersection de la ficelle et du plancher. La manipulation est reprise plusieurs fois.
Ainsi, finalement, les élèves constatent que les points au sol sont alignés, et ceci avec une grande précision. **Du coup voilà une droite qui apparaît comme intersection de deux plans, mise en évidence expérimentalement.**
Cette expérience, il me semble, permet d'introduire des modèles mathématiques. Les actions ne sont pas purement matérielles, nous avons forcément été obligés d'introduire l'idée de plan, l'idée de droite, ...

Une autre situation, réalisée en classe en sixième, sur trois séances :
C'est un peu la situation des fils parallèles, mais il s'agit ici de construire deux droites sécantes. Dans la salle de classe des ficelles sont tendues d'un coin à l'autre (opposé) mais fixées à des hauteurs différentes. Une ficelle est complètement tendue en diagonale ; l'autre est fixée à une extrémité ; où faut-il fixer l'autre extrémité pour que les deux droites soient sécantes ?

Dans une activité comme celle-là, une partie seulement des éléments est matérialisée. Des plans et des droites invisibles, pertinents pour la résolution, sont à considérer (les plans verticaux contenant les "droites - ficelles" et l'intersection de ces plans). **Les manipulations seules ne sont pas suffisantes pour résoudre le problème. Les élèves sont amenés à concevoir des modèles, à construire un modèle mathématique de la situation, et éventuellement (même sûrement) à changer d'espace pour la résolution. Dessiner des schémas, ou travailler sur des maquettes, par exemple.**

Une idée à retenir

Les élèves doivent avoir réalisé des manipulations, et s'être construit des références, à la fois dans le micro-espace et dans le méso-espace. A partir du moment où un élève va, pour un problème posé dans tel espace, faire référence à tel autre espace, c'est que la situation dans le micro et dans le meso ont quelque chose de commun, et ce quelque chose de commun ne peut être qu'un modèle mathématique déjà élaboré ou tout au moins en train de se construire.
C'est une manière de s'assurer que l'on est en train vraiment de construire quelque chose dans l'esprit des élèves, quand on leur permet de passer de l'un à l'autre.

Patrons de solides – Travaux d'élèves
Passation classe de CM1/CM2, janvier 1999

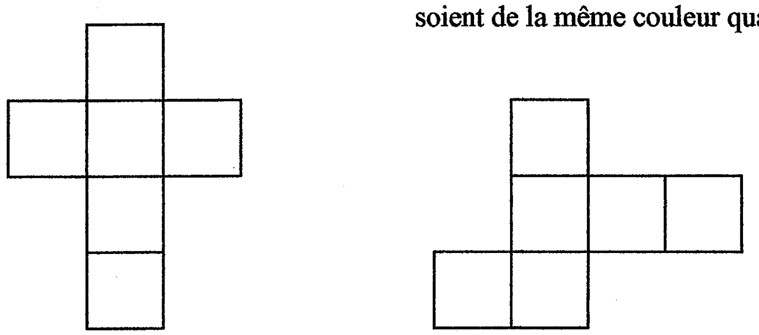
Après avoir repéré dans les manuels les différentes activités proposées aux élèves concernant les patrons de solides, nous avons retenu cinq tâches qui nous semblent pertinentes pour révéler les compétences des élèves ou certaines de leurs conceptions sur ce sujet.

- Repérer sur un patron les faces opposées d'un solide.
- Dénombrer à partir d'un patron les faces, arêtes, et sommets d'un solide.
- Associer un patron à une représentation en perspective d'un cube à motifs.
- Compléter un dessin pour obtenir le patron d'un solide.
- Reconnaître si un dessin de type patron est ou non le patron d'un solide.

Cinq exercices correspondants à chacune de ces tâches (format normal en appendice), ont été proposés dans la classe de CM1-CM2 d'Isabelle Peltier-Lécullé, Instituteur maître formateur, en Seine Saint-Denis, en janvier 1999. Les passations n'ont pas été faites toutes le même jour ce qui explique les différences dans le nombre d'élèves présents.
Dans les encadrés sont repris les énoncés des exercices.

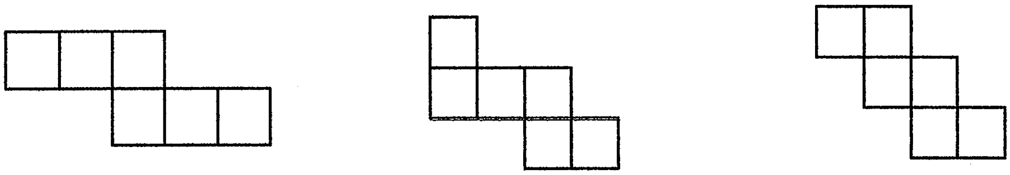
Repérer sur un patron les faces opposées d'un solide
(17 élèves)

Tu as un cube de couleur bleu, rouge et jaune.
Les faces opposées sont de la même couleur.
Colorie ces deux patrons pour que les faces opposées soient de la même couleur quand on reconstitue le cube.

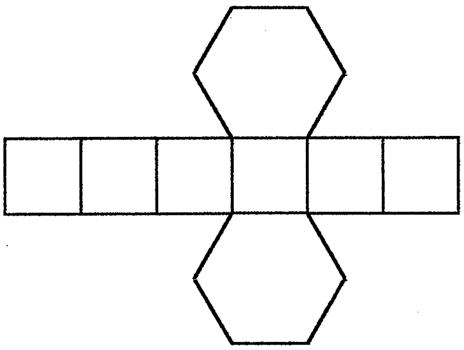


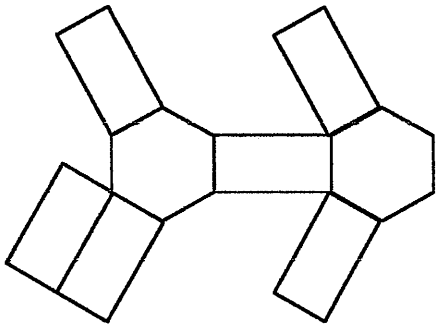
Passation : la maîtresse montre un cube de couleur bleu, rouge, jaune et dit : « Voici un cube dont les faces opposées sont de la même couleur ». Elle demande ensuite aux élèves de lire la consigne écrite de l'exercice, et la fait reformuler par un autre élève. Suivent 5 minutes de travail.

Pour cet exercice, nous n'avons repéré que des propositions correctes. Le cube est un objet bien connu au CM1 et CM2, les patrons classiques ont été travaillés ; sur ceux proposés les faces opposées sont bien repérables.
Peut-être qu'avec les patrons suivants les résultats auraient été autres, du fait de la non visibilité directe des faces qui s'opposent.



De même si on travaillait avec des prismes droits avec suffisamment de symétrie pour que les faces soient opposées deux à deux, par exemple un prisme à base hexagone régulier, en choisissant des patrons comme ceux-ci :



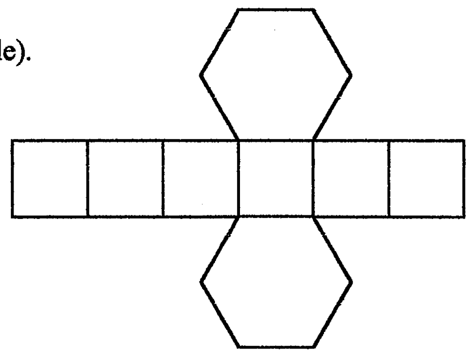


Ce qui serait évalué beaucoup plus clairement qu'en choisissant des patrons du cube, c'est la capacité à recomposer mentalement le solide dans sa tête ; il faut essayer de le remonter en volume, pour tenter de visualiser les faces qui se correspondent.

Dénombrer à partir d'un patron les faces, arêtes, et sommets d'un solide

(17 élèves)

Voici le patron d'un solide (c'est un prisme à base hexagonale).
Il faut prévoir et écrire en regardant le patron,
le nombre de faces du solide quand il est reconstitué
le nombre d'arêtes du solide quand il est reconstitué
le nombre de sommets du solide quand il est reconstitué.



Passation : la maîtresse montre un prisme à base hexagonale et dit : « Voici un prisme à base hexagonale ». Mise au point avec les élèves à l'oral : qu'est-ce qu'une face ? une arête ? un sommet. Elle demande ensuite aux élèves de lire la consigne écrite de l'exercice, et la fait reformuler par un élève. Suivent 5 minutes de travail.

Réponses des élèves pour le nombre de faces :
15 élèves répondent 8 faces ; 1 élève 6 faces ; 1 élève ne répond pas.
Réponses des élèves pour le nombre d'arêtes :
2 élèves répondent 18 arêtes ; 1 élève 17 arêtes ; 4 élèves 16 arêtes ; 2 élèves 12 arêtes ; 1 élève 8 arêtes ; 2 élèves 7 arêtes ; 2 élèves 6 arêtes ; 1 élève 5 arêtes ; 2 élèves ne répondent pas.
Réponses des élèves pour le nombre de sommets :
12 élèves répondent 12 sommets ; 1 élève 6 sommets ; 2 élèves 2 sommets ; 2 élèves ne répondent pas.

Ce qui est évalué ici a priori :
Savoir que le solide et le patron ont le même nombre de faces (les repérer sur le patron est immédiat) ; savoir qu'une arête et un sommet du solide sont représentés une ou plusieurs fois sur le patron, et qu'on ne peut pas les dénombrer en comptant segments et sommets sur le patron. Alors il faut ou bien travailler sur le solide (en l'observant en vrai ou dans sa tête), ou bien savoir lire le patron en faisant se correspondre les segments pour une même arête (en général pour les sommets, il est plus rapide et efficace de voir le solide, que de travailler sur le patron).

Importance ici aussi du choix du solide et du patron proposé pour réaliser ce travail. Il faut pouvoir se représenter facilement le solide, sans le connaître trop, sans déjà connaître combien il a de faces d'arêtes et de sommets, car alors on travaille sur les connaissances déjà acquises et non plus sur la lecture du dessin patron.

<u>Associer un patron à une représentation en perspective d'un cube à motifs.</u>

(16 élèves) Cet exercice est proposé dans Nouvel Objectif Calcul CE2, p145 livre de l'élève. Pour l'énoncé voir l'appendice ci-après.

9 élèves associent le patron au cube B (c'est la réponse exacte) ; 6 élèves associent le patron au cube A. ; 1 élève associe le patron au cube C

Reprise des arguments proposés :

- Pour l'élève qui répond le cube C :

- *Parce que il y a le A il y a des cerises au-dessus. Et le B il y a des prunes au-dessus.*

- Pour les élèves ayant choisi le A :

- *Les autres je ne les avais pas choisis parce que la cerise n'était pas en haut et que celui qui était déplié avait la cerise en haut.*
- *Dans le cube A, il y a la cerise en haut et c'est vrai, il y a la pomme au-dessus de la cerise et c'est vrai et il y a la grappe de raisin à côté comme la pomme et c'est la A.*

- *Je ne prends pas le B et le C parce que si on le plie il est de travers et il y a les mêmes fruits.*

- *Parce que les faces sont plus longues et planes.*
- *Parce que les autres ils n'ont pas le même dessin*
- *B parce que le cube B est mal placé ; C parce que la poire est mal placée.*

- Pour les élèves qui associent le patron au cube B (qui est la bonne réponse) :

- *Ce n'est pas le cube A car normalement le raisin est opposé à la pomme, pas à côté. Ce n'est pas le cube C car normalement la poire est opposée à l'orange. C'est le cube B.*
- *Parce que la poire et la pomme ne sont pas à côté des prunes.*
- *Parce que sur le modèle la pomme est à côté de la poire et sur celle que j'ai entourée c'est pareil.*

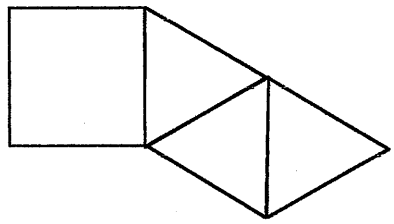
- *Parce que les fruits ne se suivent pas alors que le B si on le déplie les fruits se suivent exactement comme le patron déplié. Donc c'est le B et les autres sont faux.*
- *Le A ne convient pas parce que quand on le replie le raisin ne peut pas être à côté de la pomme et le C n'est pas bon parce que il est faux.*
- *Parce que si l'on déplie les deux autres on verra qu'ils ne sont pas disposés pareil.*

- *Parce que si on plie le A la grappe de raisin* (inachevé).
- *A et C ne conviennent pas parce qu'il fallait que les prunes soient en première.*
- *Parce que les fruits ne sont pas bien ordre.*

<u>Compléter un dessin pour obtenir le patron d'un solide</u>

(16 élèves)

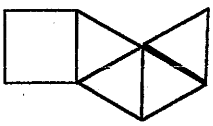
Voici le patron d'une pyramide à base carrée,
mais ce patron n'est pas complet, il manque une face.
Construis cette face pour compléter le patron.



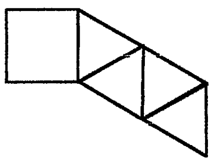
Passation : la maîtresse demande aux élèves de lire la consigne écrite, dans leur tête, puis elle la lit à haute voix, et la fait reformuler par un élève. Pour construire la face manquante, les élèves choisissent l'outil ou les outils dans leur matériel de géométrie dont ils ont besoin. Suivent 5 minutes de travail.

Il nous faut distinguer ici les choix des élèves pour la position de la face, et ensuite les constructions avec respect ou non les longueurs.
Pour le positionnement et le positionnement seulement (je me permets donc d'utiliser des triangles équilatéraux pour les reproductions, bien que les élèves n'aient pas respecté les égalités de longueurs) :

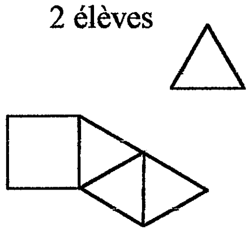
4 élèves



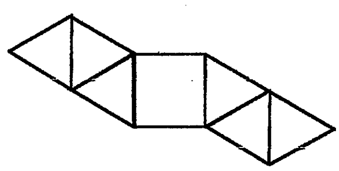
7 élèves



2 élèves



1 élève



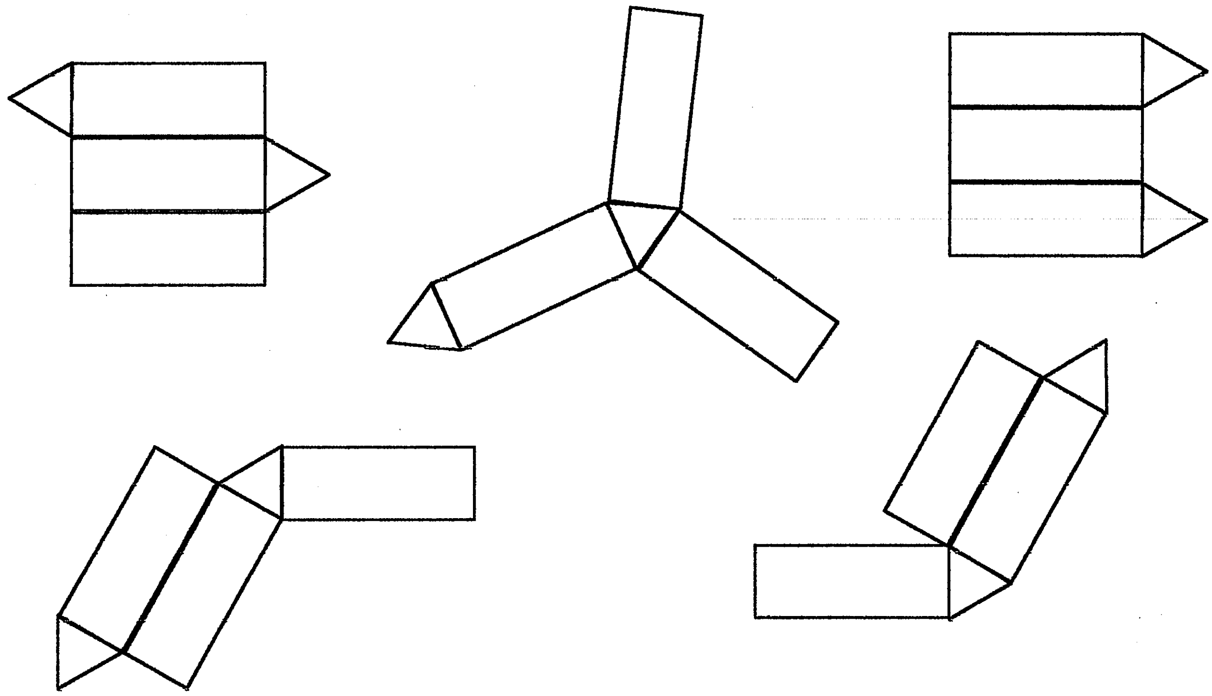
Et 1 élève ne répond pas.

Pour la construction aux instruments qui nécessite un respect d'égalité de longueurs, aucune production d'élève ne les prend en compte. Les triangles construits sont des triangles quelconques.

Reconnaître si un dessin de type patron est ou non le patron d'un prisme à base triangulaire.

(20 élèves) Cet exercice est extrait de J'apprends les maths, CM1, p72 livre de l'élève.

Parmi les cinq représentations planes certaines sont des patrons d'un solide, et d'autres non. Le solide est une boîte de Toblérone (un prisme à base triangulaire). Pour chacune des figures, indique si elle est ou non un patron de ce solide et explique pourquoi.



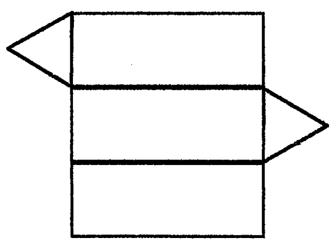
Passation : La maîtresse montre une boite de Toblérone, en disant : « voici un exemple de boite en forme de prisme à base triangulaire ». Elle demande aux élèves de lire la consigne, et la fait reformuler pas un élève. Ensuite 10 minutes de travail.

Les argumentations pour dire que le dessin est un patron du solide sont très rares, uniquement trois élèves formulent :
Oui parce que si on la referme ; Oui on peut ; Il est vrai car on peut le faire

Etude des autres réponses et des arguments pour dire que le dessin n'est pas un patron du solide :

---

9 élèves : OUI c'est un patron
11 élèves : NON ce n'est pas un patron

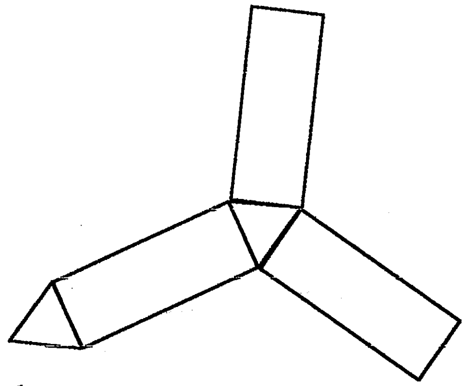


- *Non parce qu'il y a une face qui n'est pas au bon endroit*
- *Il est faux car les faces ne sont pas au bon endroit*
- *Non parce que le triangle de gauche ne doit pas être là.*

- *Non parce qu'il fallait que le triangle du haut soit au milieu*

- *Non parce qu'on ne peut pas le plier. Non parce qu'on ne pourra pas le fermer, la languette du haut le triangle n'est pas au bon endroit.*

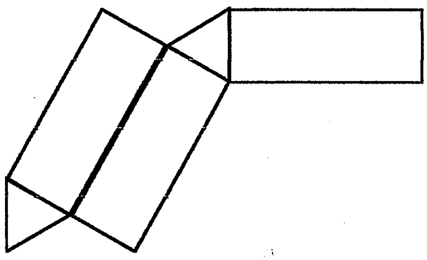
- *Non parce que les triangles sont à gauche*
- *Non parce que le triangle de gauche est à l'envers*
- *Je dis non parce qu'il n'y a pas 8 arêtes.*



16 élèves : OUI c'est un patron
4 élèves : NON ce n'est pas un patron

- *Non parce que un triangle est mal placé.*

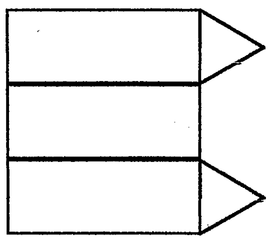
- *Non parce qu'on ne peut pas le plier.*
- *Non c'est pas un patron parce que quand on le ferme et bien on ne peut pas.*
- *Non parce qu'il manquera une face pas refermée*



15 élèves : OUI c'est un patron
5 élèves : NON ce n'est pas un patron

- *Non parce que le rectangle en haut à droite ne peut pas être bien placé*
- *Non parce que le rectangle droit en haut ne doit pas être là.*

- *On ne peut pas parce que ce rectangle* [celui juxtaposé au triangle seulement] *si on le plie il va être de travers.*



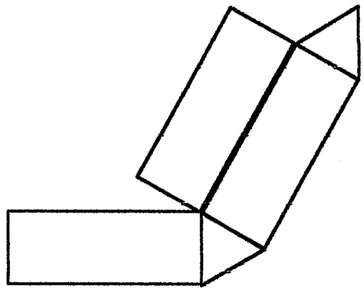
TOUS les élèves :
NON ce n'est pas un patron

- *Non parce que la face (le triangle) n'est pas au bon endroit.*
- *Les deux triangles ne doivent pas être du même côté.*
- *Non parce qu'il y a deux triangles d'un côté et de l'autre non. Il en faut un de chaque côté.*
- *Le triangle n'est pas de ce sens et il est mal placé.*

- *Parce que les deux triangles droit ne doit pas être là.*

- *Non, ils [les triangles ; les deux faces triangulaires] sont du même côté [et il y a un côté qui ne sera pas couvert].*
- *Non on ne peut pas la refermer.*
- *Non parce que si on le plie dans un côté il y aura l'autre côté qu'en aura pas de triangle.*

- *Comme il y a deux triangles ça ne va pas marcher.*
- *Non parce que le premier rectangle est collé au triangle donc on ne peut pas le déplacer puis les triangles ne sont pas à la même place.*
- *Non parce qu'il n'y a pas 8 arêtes.*

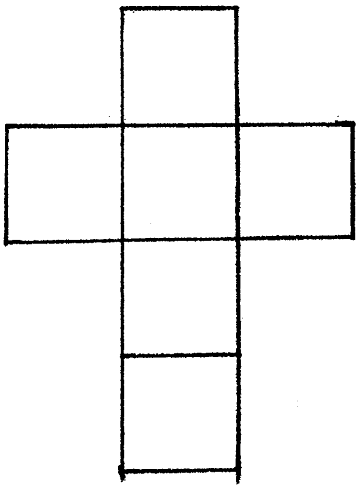


12 élèves : OUI c'est un patron
8 élèves : NON ce n'est pas un patron.

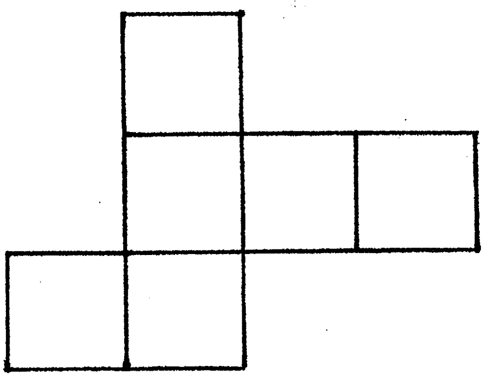
- *Non parce que le rectangle est mal placé.*
- *Non car une face n'est pas comme il faut*
-
- *Il est faux car on ne peut pas le faire*
- *Non parce que ce côté là ne va pas être couvert.*
- *Non : car si on replie cette face va être cachée* [le rectangle uniquement juxtaposé à un autre rectangle].

- *Non quand le rectangle en haut à gauche touchera le sommet du triangle de droite.*
- *Non on ne peut pas déplacer le rectangle que j'ai barré* [celui juxtaposé au triangle seulement]
- *On ne peut pas parce les triangles sont sur un même rectangle.*
- *Non parce qu'il y a une languette plus grande que les autres.*

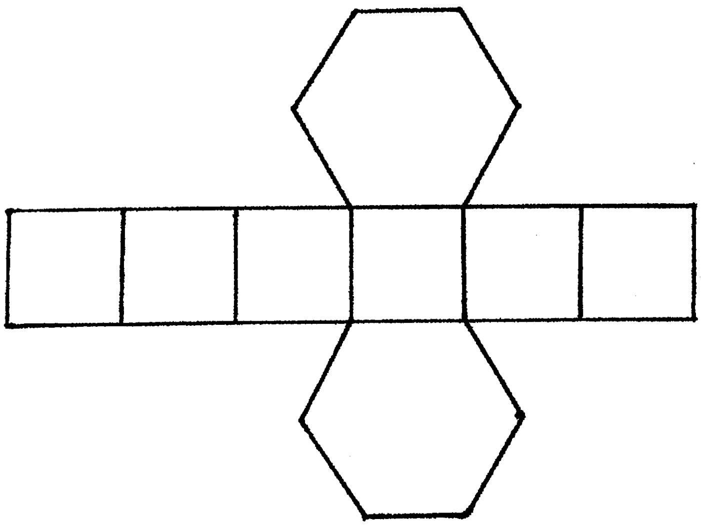
Nom : prénom : classe :



Tu as un cube de couleur bleu, rouge et jaune.
Les faces opposées sont de la même couleur.
Colorie ces deux patrons pour que les faces opposées soient de la même couleur quand on reconstitue le cube.

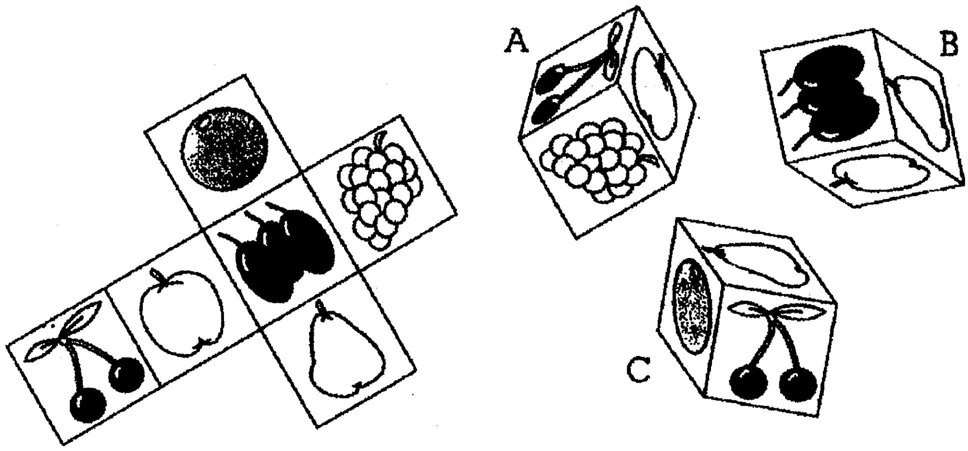


Voici le patron d'un solide (c'est un prisme à base hexagonale).
Il faut prévoir en regardant le patron et écrire,
le nombre de faces du solide quand il est reconstitué
le nombre d'arêtes du solide quand il est reconstitué
le nombre de sommets du solide quand il est reconstitué



Nom : prénom : classe :

A quel cube correspond ce patron ?



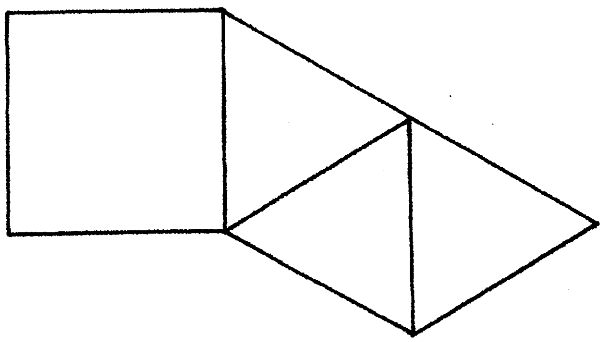
Explique pourquoi les autres ne conviennent pas.

....

....

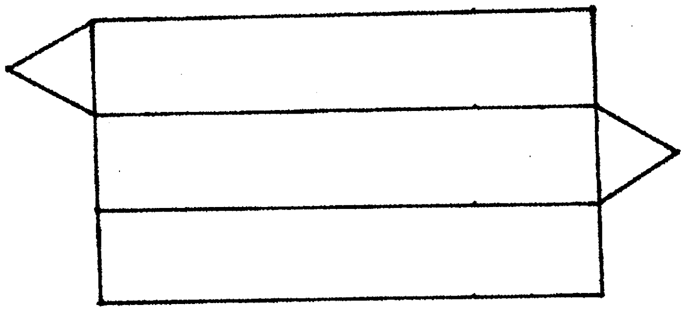
....

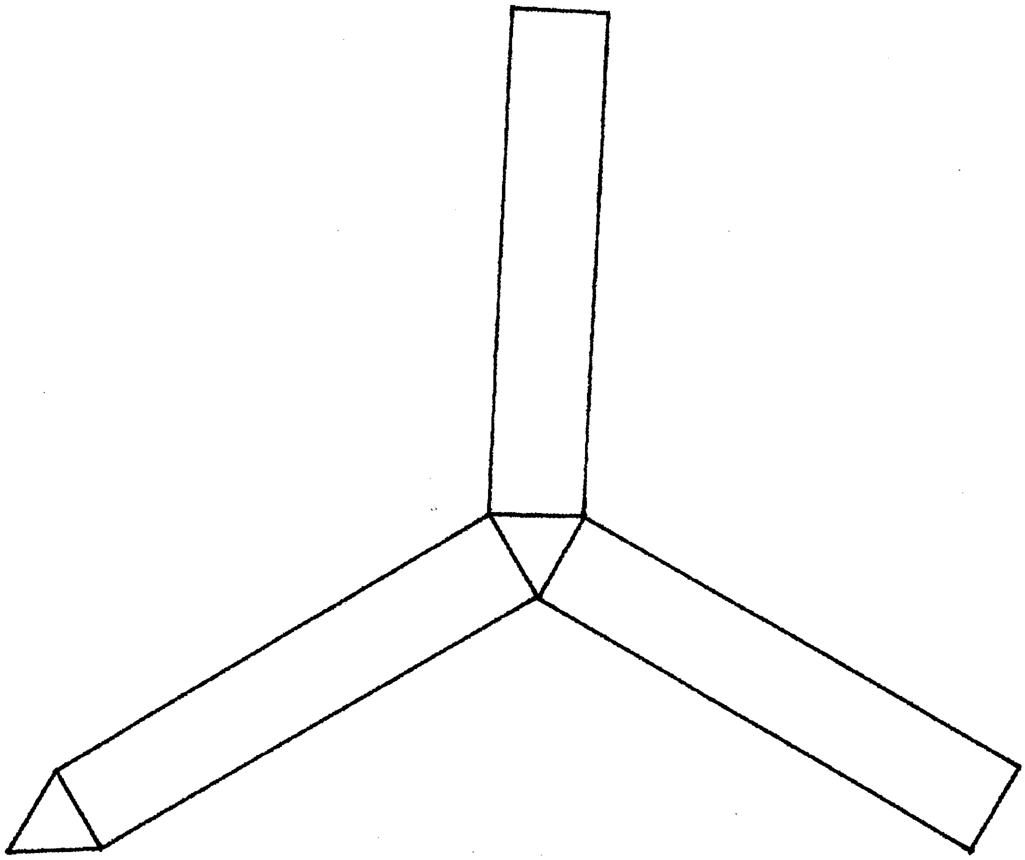
Voici le patron d'une pyramide à base carrée, mais ce patron n'est pas complet,
il manque une face. Construis cette face pour compléter patron.

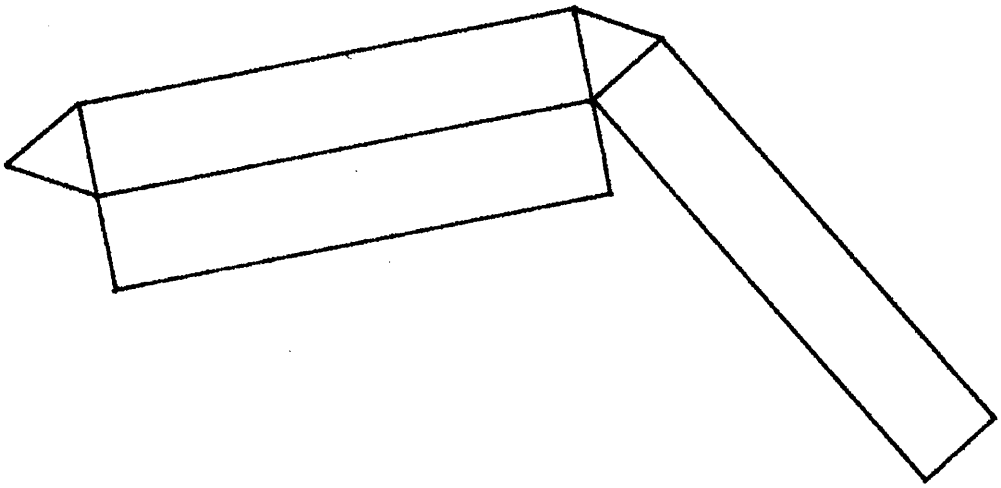


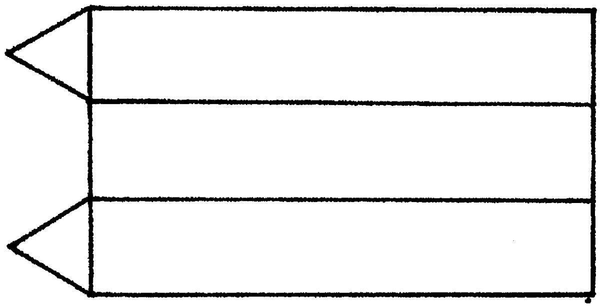
Nom : prénom : classe :

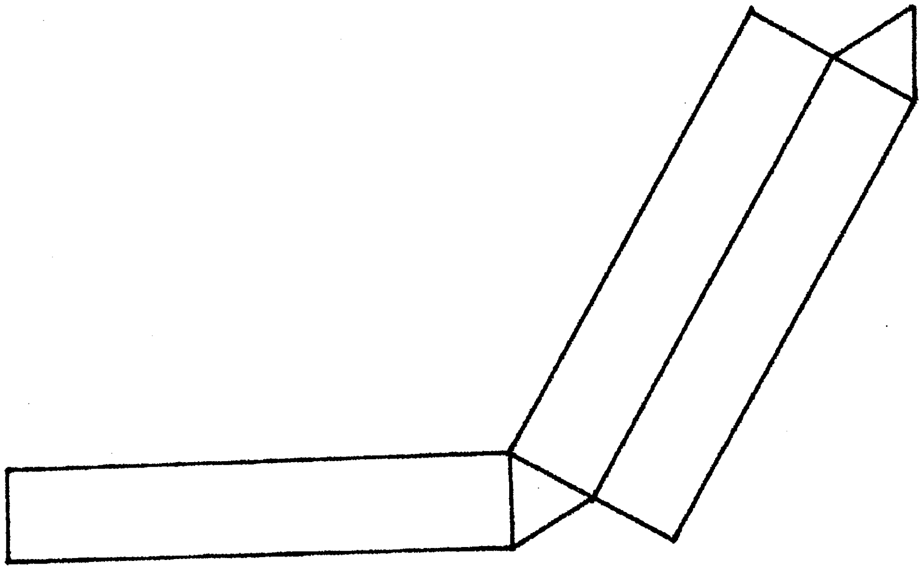
Parmi les cinq représentations planes certaines sont des patrons d'un solide, et d'autres non.
Le solide est une boite de Toblérone (un prisme à base triangulaire).
Pour chacune des figures, indique si elle est ou non un patron de ce solide et explique pourquoi.





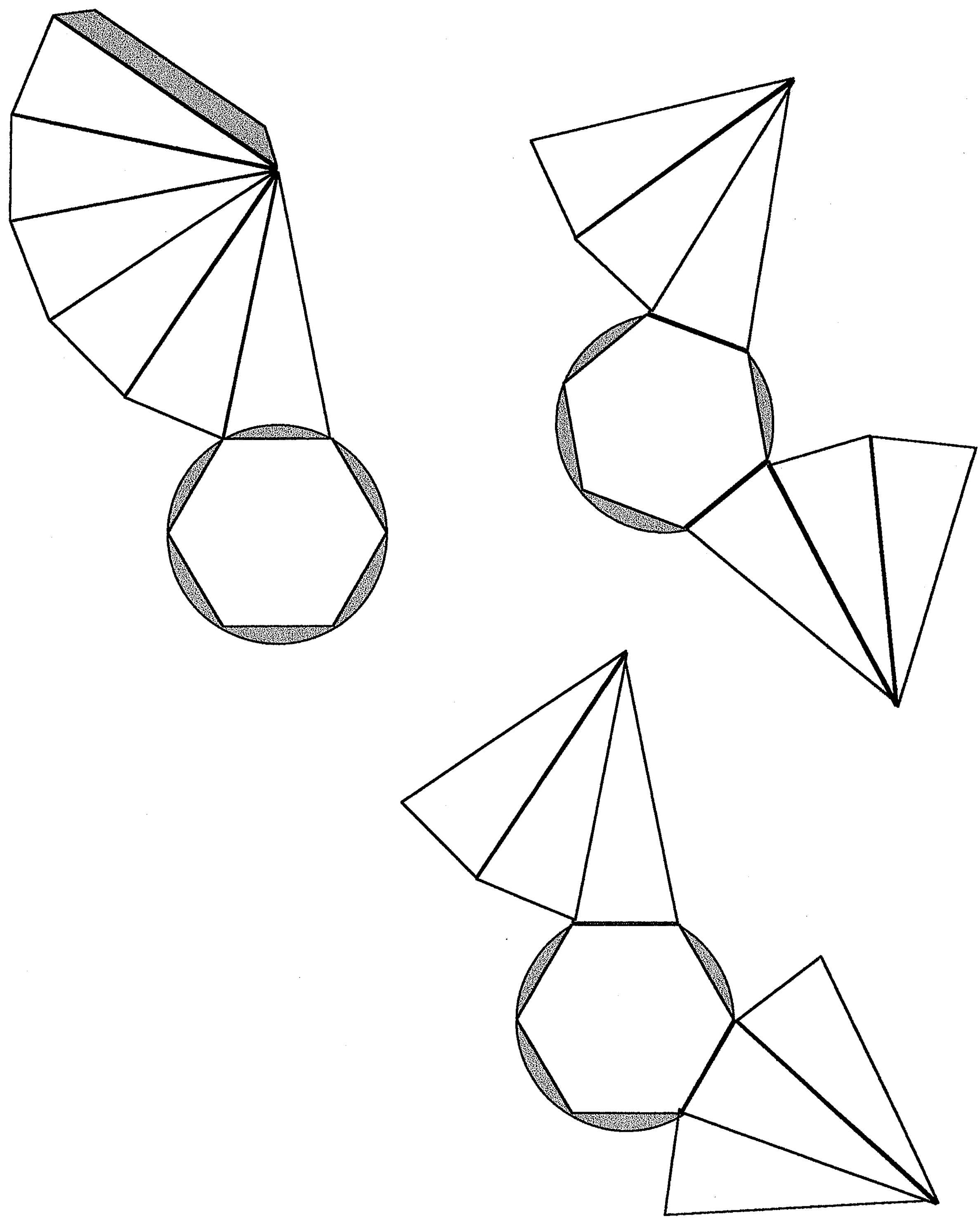






Matériel utilisé pour « la démonstration visuelle » de définition d'un patron de solide.

Un solide (papier canson épais, plastifié, couleur vieux rose, avec les arêtes repassées au stylo épais pour une bonne visibilité) : pyramide à base un hexagone régulier, de même dimensions que celles utilisées pour la constructions des patrons. Diamètre du cercle pour l'hexagone 15 cm, et longueur des côtés des triangles 17 cm. En grisé ce sont des éléments visibles sur le matériel, hachuré, conservés pour faciliter les manipulations.



Indication pour le choix du solide :

Ce n'est pas nécessairement un solide connu, peut-être qu'au contraire, la démonstration sera d'autant plus étonnante que le solide et ses patrons ne sont pas bien connus des élèves. Cependant, il ne doit pas non plus à l'inverse être trop complexe.

D'autre part il doit être facile à construire, ses représentations planes de type patron doivent pourvoir être réalisées facilement.

Pour toutes ces raisons j'ai choisi la pyramide à base hexagonale ; facilement repérable comme solide par les élèves, avec des représentations planes variées, non évidentes à percevoir comme pouvant reconstruire le solide, et faciles à construire avec les instruments.

Indication sur les choix des « vrais » et « faux » patrons :

Pour les « vrais » : ils doivent être de nature différente pour l'agencement des faces, et ne pas être trop classiques, au sens de « ceux utilisés le plus fréquemment », « les stéréotypes ».

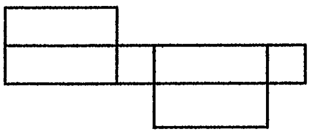
Le « faux » patron doit être proche du point de vue de l'appréhension visuelle d'un vrai patron, un de ceux proposés par exemple, pour que la reconnaissance ne soit pas tout à fait immédiate.

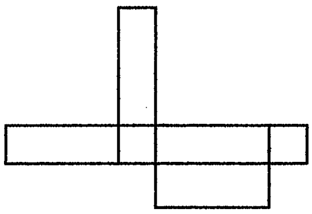
Lors du moment de construction technique avec les stagiaires lors du stage « Maths / Techno » mai 2001, un groupe a choisi de travailler à partir d'un prisme à base hexagonale ; un autre sur le pavé ; et les autres sur la pyramide à base hexagonale.

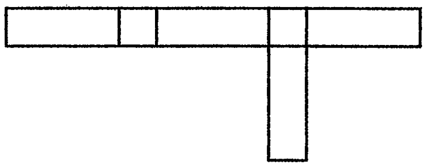
Ces derniers ont utilisé en général mon matériel comme gabarit pour leur construction.

Les stagiaires travaillant sur le prisme à base hexagonale ont commencé par un patron puis en terme de rentabilité papier réalisent des pavages du plan avec des rectangles et des hexagones. Par manque de temps, je ne sais pas quelles représentations ils ont choisies.

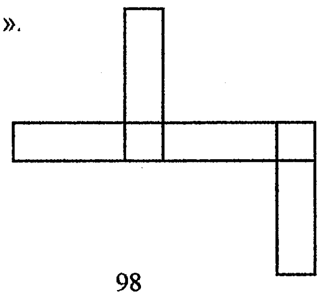
Pour le groupe travaillant sur le pavé, les dimensions utilisées sont 8 cm sur 5 cm pour les rectangles. Les représentations sont les suivantes :

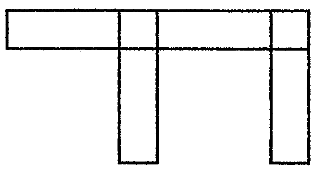






Deux représentations (l'une patron, l'autre non) avaient été envisagées dans un premier temps, mais finalement abandonnées (ci-dessous) : la première faisait trop référence à un patron classique, « on voyait trop que c'était bien un patron » ; l'autre faisait trop apparaître l'inadéquation, avec deux faces rectangulaires d'un même côté, « on voyait trop que ce n'était pas un patron ».





<u>Stage de Formation Continue, « Maths/Techno », avril-mai 2001</u>

<u>Extrait séance du lundi 7 mai</u>

<u>Thème : la symétrie axiale</u>

En italiques les interventions des stagiaires, en caractères normal, les miennes ; dans les encadrés ce qui figure au tableau ; les espaces pour tenter d'entrevoir différents moments dans la séance.

Elle a duré environ 1h20, la reprise est faite ici à partir des notes personnelles au cours et suite à la séance.

- Nous allons travailler autour de la symétrie axiale, et voir quelles sont les connaissances en jeu dans les activités proposées à l'école primaire, que l'on va essayer de formuler clairement, dans la mesure où elles ne sont pas toujours explicitées.

Pour cela nous allons démarrer sur une activité classique de reconnaissance de configurations symétriques ou non par rapport à une droite donnée.

C'est une activité extraite du manuel Nouvel Objectif Calcul CM1, et retravaillée par une PE2 lors d'un stage en responsabilité (cf. appendice).

Je vous distribue la feuille et vous laisse quelques minutes pour faire l'activité, c'est à dire reconnaître si les configurations constituent deux figures symétriques par rapport à la droite fixée, et surtout donner les arguments qui permettent de justifier vos réponses.

(Deux minutes après) Reprenons collectivement.

Commençons par les figures symétriques l'une de l'autre par rapport aux droites tracées. Quels sont les arguments ?

- *Pliage et superposition*
- Oui, mais à formuler en phrase pour la classe.
- *Si on plie selon l'axe, les deux figures se superposent exactement.*

Au tableau, j'écris

Si on plie	le long selon suivant sur	de la droite, les deux figures se superposent exactement. de l'axe du trait

- J'indique plusieurs mots pour ne pas se limiter à une seule formulation :

Les élèves voient un trait, c'est un mot pragmatique ; le mot axe ne doit pas être pris pour axe de symétrie quand il n'y a pas de symétrie ; et le mot droite serait le mot géométrique utilisé sans prendre en compte l'aspect spatial et visuel des dessins.

- *Il faudrait ajouter : « et regarder par transparence », parce que quand on plie une feuille blanche, on ne voit rien, ...*

(J'ajoute au tableau : « et regarder par transparence »)

- Cette référence au pliage et à la superposition, est un argument pour valider toute réponse, que la configuration soit symétrique ou non. C'est comme la référence au découpage pliage et la montée en volume pour reconnaître si une représentation de type patron est ou non le patron d'un solide (travaillé lors d'une séance précédente). Mais on reste là sur un argument de type spatial, sans faire intervenir de géométrie. On a vu qu'en effet pour donner une réponse affirmative on n'a pas d'autre recours que cet argument ; mais par contre pour fournir une réponse négative (dire qu'un dessin n'est pas le patron d'un solide) on peut utiliser des arguments qui reposent sur des propriétés géométriques des patrons ou des solides.

De même ici, en nous intéressant maintenant aux configurations non symétriques, nous allons en argumentant, essayer de formuler des propriétés géométriques de la symétrie axiale.

- *Pour le B, les points correspondants ne sont pas sur une ligne perpendiculaire à l'axe.*
- *Mais c'est drôlement compliqué, à la fois la notion et la formulation !*
- *Oui mais c'est ça.*
- *Mais comment les élèves peuvent s'en rendre compte ?*
- *Il faut le savoir avant.*
- On la note au tableau, c'est en effet une des propriétés les plus complexes à mettre en évidence, parce qu'elle n'est pas tout à fait naturelle, nous reviendrons là-dessus ; je vous propose de poursuivre, de noter les autres propriétés puis nous reviendrons sur celle-ci ensuite.

Deux figures symétriques par rapport à un axe doivent avoir les points correspondants situés sur une droite perpendiculaire à l'axe.

- *Pour la D, c'est la distance à l'axe ; les chiens n'ont pas la même distance à l'axe.*

Deux figures symétriques par rapport à un axe doivent être à la même distance de l'axe.

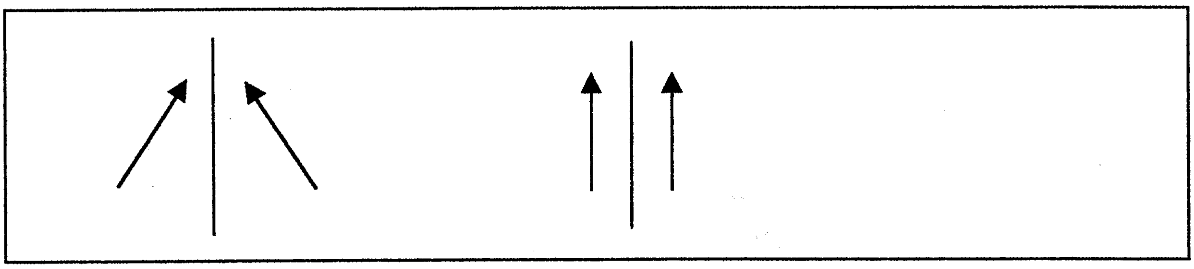
- *Moi, pour moi, dans ma tête, la distance à l'axe et la perpendicularité ça va ensemble, c'est comme ça qu'on la définit la distance à l'axe.*
- En effet, d'un point de vue géométrique, la distance d'un point à une droite, c'est bien la longueur du segment construit perpendiculairement à la droite, d'extrémité le point et le point intersection sur la droite. (Je fais le schéma classique au tableau).
- *Oui mais les enfants, quand on fait ce dessin, d'une droite et d'un point, et qu'on leur demande la distance du point à la droite, ils prennent diverses mesures, et pas forcément suivant la perpendiculaire.*

- En effet, et ici, pour la symétrie, les enfants peuvent percevoir une notion, une propriété spatiale, globale de distance à l'axe, sans percevoir de perpendicularité.
- *La figure des chiens devrait alors être plus claire, par exemple, un des chiens bien sur des perpendiculaires, mais bien plus éloigné de l'axe que ce qui est proposé.*
- Tout à fait, vous avez tout à fait raison. La figure devrait être plus lisible pour bien faire apparaître la propriété non respectée ici.
- *Pour le E, c'est encore la perpendicularité, mais comment la formuler ?*
- *Les figures doivent être sur une même ligne perpendiculaire à l'axe.*
- *Au même niveau par rapport à l'axe.*

- *Pour le G, quand on plie, il doit y avoir retournement.*
- On a dit qu'on évitait dans nos définitions des références à l'action, mais l'idée que vous mentionnez est tout à fait juste, comment peut-on la reformuler ?
- *Deux figures symétriques doivent être retournées l'une par rapport à l'autre.*

Deux figures symétriques par rapport à un axe doivent être retournées l'une par rapport à l'autre.

- *Et si la figure est un carré par exemple, il n'y a pas de retournement.*
- *Ou avec un axe de symétrie.*
- Oui, ou avec un axe de symétrie, parallèle à l'axe. Il y a un retournement, mais il ne se voit pas. D'où le danger de travailler avec ce genre de figure, car on ne fait pas apparaître visuellement une propriété spécifique de la symétrie axiale.
- *On peut parler de l'orientation.*
- *Elles ont une orientation opposée.*
- Attention sur ce dessin par exemple (celui de gauche), les flèches n'ont pas une orientation opposée. On peut dire, sans détailler, que deux figures symétriques n'ont pas la même orientation, en général ; sur ce dessin par exemple (celui de droite), ce n'est pas le cas.



- Bon, est-ce qu'on a fait le tour des propriétés ?
- *Oui.*
- Dans cet exercice oui, mais sinon il en manque.

- *Pour le A, on a oublié le A, il y a la forme de la queue.*
- C'est quelle propriété sous-jacente ?
- *La forme, deux figures symétriques doivent avoir la même forme.*

Deux figures symétriques par rapport à un axe, doivent avoir la même forme.

- Oui, et si on avait une configuration avec un chien de même forme mais réduit ou agrandi ?
- *La taille aussi, elles doivent avoir la même taille.*
- *Pour moi la taille ça va avec la forme, c'est comme pour Catherine tout à l'heure, la distance à l'axe et la perpendicularité, je ne sépare pas la forme et la taille dans ma tête.*
- *On ne peut pas dire « dimensions » ?*
- Si, bien sûr, « dimensions », on dira même au collège « la symétrie conserve les longueurs ». Les mots « taille » ou « dimensions » recouvrent à la fois les longueurs et les surfaces. Cette ambiguïté me paraît opportune ici.

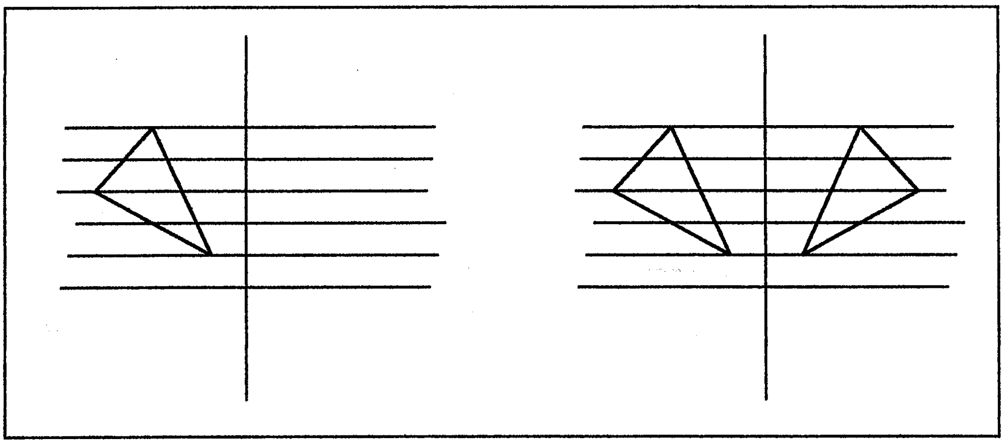
Pour en revenir à la remarque de Pascale, en fait, la forme ici est considérée comme « nature générale » ; si les chiens sont petits ou grands les élèves acceptent de dire qu'ils ont même forme, mais par contre pas la même taille. Il vaut mieux séparer l'aspect « allure générale » et « dimensions ». Et en géométrie on distingue ces deux aspects.

Deux figures symétriques par rapport à un axe doivent avoir $\begin{cases}\text{la même taille}\\\text{les mêmes dimensions}\end{cases}$

- Voilà, on a fait le tour des propriétés.

Revenons sur celle de perpendicularité à l'axe. Quelles sont les activités qui peuvent permettre de prendre conscience de cette propriété ?
- *On la montre, tout simplement.*
- Oui, on fait une démonstration visuelle, comme celle-ci par exemple :

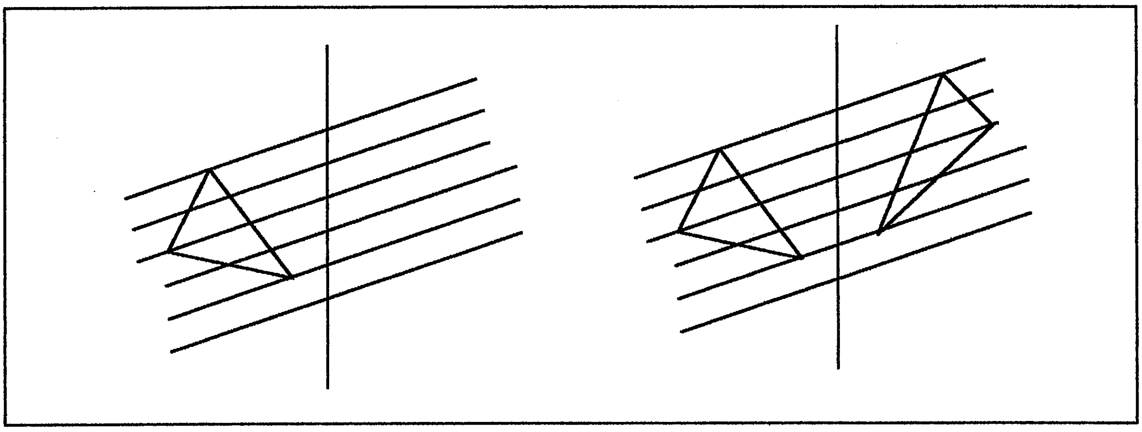
Je fais sur une feuille un point à la craie rouge, et un trait et je plie le long du trait., et par transparence je repasse d'un côté et de l'autre avec la même couleur. Il faudrait distinguer les couleurs, pour une démonstration visuelle performante et le faire sur calque sinon on a trop de manipulations et on ne voit rien. On observe et on constate.
- *Et bien oui.*
- *Mais c'est quand même pas évident à voir.*
- Voici une autre proposition, une activité extraite du manuel « l'heure des maths CE2 », mais remaniée.



- Il s'agit de reporter de l'autre côté de l'axe, la distance entre le point et l'axe (déterminé sur la droite du réseau, et non la distance au sens de distance à l'axe).

Il faut donc construire les points correspondants aux sommets du triangle suivant cette contrainte.

Dans le manuel l'heure des maths il est proposé de le faire avec un réseau de parallèles perpendiculaires à l'axe, l'intérêt serait de le faire aussi sur un réseau de parallèles non perpendiculaires à l'axe. Comme suit :



- Car ensuite on peut observer la superposition ou non des deux triangles après pliage selon l'axe, observer la superposition dans le premier cas, et la non superposition dans le second cas. Or la tâche, et le procédé de reproduction est identique dans un cas et dans l'autre. Quel est l'élément changeant ? L'orientation du réseau par rapport à l'axe. Pour que l'on ait symétrie par rapport à l'axe, ce réseau de droites doit être *perpendiculaire* à l'axe.

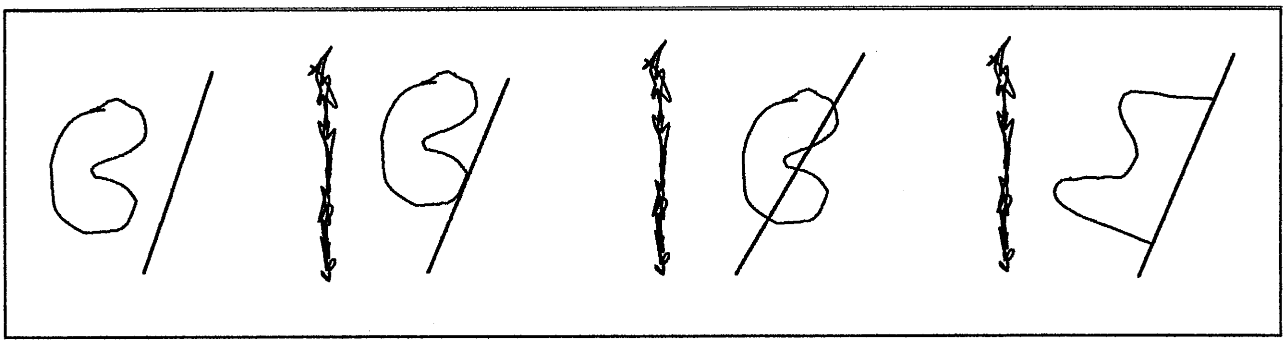
- Je n'ai pas d'autre proposition pour mettre en évidence cette propriété.

De toutes façons, il faut savoir que cette difficulté est inhérente à la géométrie. En effet, la perpendicularité à l'axe relève d'un *aspect ponctuel* de la symétrie axiale. Tandis qu'avec les élèves à l'école primaire on travaille sur *l'aspect global* de la symétrie axiale. Il y a donc un saut, une rupture, qu'il faut assumer, et que l'on ne peut cacher. Ce n'est pas le même point de vue sur la transformation.

- Remarquons que l'aspect ponctuel, est travaillé en $6^{\text{ème}}$, à partir de la construction point par point du symétrique d'une figure.
- *Comment fait-on alors pour passer au ponctuel ?*
- De façon assez arbitraire, comme je vous l'ai dit précédemment, par exemple à partir de la reprise de l'activité précédente, ou bien en faisant remarquer pour une figure polygonale avec un nombre important de côtés, qu'il est rapide de repérer les symétriques des extrémités (certains élèves le repèrent d'ailleurs seuls), ou bien par des jeux à deux de construction de symétriques au fur et à mesure, …

Mais cela reste en effet très monstratif.

- On a dégagé ces propriétés sur une tâche de reconnaissance de figures symétriques ou non par rapport à une droite, regardons maintenant plus en détail, la tâche de construction de figures symétriques, ou de symétriques de figures.
- *Dans les programmes ils disent « compléter une figure par symétrie axiale ». Est-ce que c'est uniquement des figures qui devront avoir à la fin un axe de symétrie ou bien, …*
- Je ne pense pas qu'il faille se limiter à ce genre de figure, en fait il y a plusieurs cas à traiter, tous ceux représentés par les figures suivantes (reproduites ci-dessous), où pour les trois premières on dirait plutôt « construire le symétrique de la figure par rapport à l'axe ». On obtient comme résultat alors *deux* figures symétriques. Tandis que pour la quatrième, on dirait plutôt « compléter la figure pour que la droite tracée soit un axe de symétrie » et on obtient alors *une seule* figure avec un axe de symétrie.

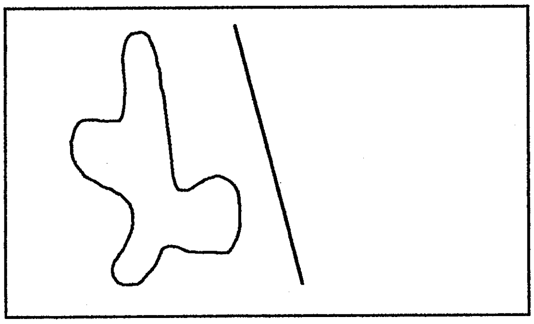
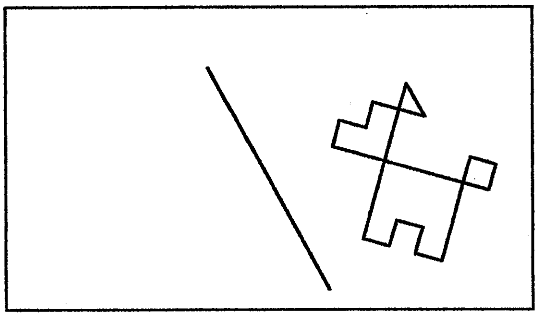


- Je préfère qu'on laisse cette discussion en suspens, qu'on décide de considérer tous ces cas, et de se poser la question de connaître différents outils qui nous permettent de résoudre la tâche de construction.

- *La calque, le pliage*
- *Les instruments*
- Oui ces moyens sont des moyens rigoureux par rapport à notre mode de validation, qui est la référence au pliage et à la superposition. Ici, quelques millimètres sur les mesures, et un décalage de quelques degrés sur les angles, définissent la marge d'erreur.

Ne peut-on pas trouver d'autres moyens, qui peut-être seraient moins rigoureux par rapport à notre mode de validation, mais toutefois mettraient en jeu les propriétés de la symétrie axiale ?

- *A main levée.*
- *A main levée ! ? pourquoi à main levée ? Et à quoi ça sert de faire des tracés à main levée ?*
- Pour répondre en partie à cette question, voici à faire vous-mêmes deux constructions à main levée. La première sur une forme courbe, la seconde sur la forme du chien du polycopié précédent. (présentées sur feuille A4).

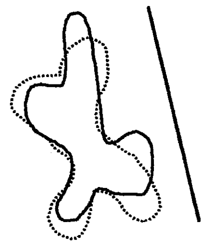



- Bien sûr, on conserve le pliage pour vérifier, mais la marge d'incertitude est plus grande, et à vous de décider si votre production convient *approximativement*.

(En apartés)

- *Ouh là là, c'est pas évident, faut coordonner plein de choses.*
- *Moi, mon dessin, ça ne me satisfait pas du tout.*

(ci-contre en pointillés sa production vue après pliage par transparence).



(Je lui fais remarquer que même si cela ne lui convient pas, certaines propriétés sont plutôt bien respectées, comme la taille globale, la forme globale, la distance à l'axe, le retournement, …elle en convient.)

- *Moi, je m'y reprends à plusieurs fois.*
- *C'est en fait très difficile, je ne m'étais jamais rendu compte qu'il fallait faire attention à tout ça.*

(En collectif)

- *Je ne comprends toujours pas à quoi ça sert, je trouve que c'est trop difficile.*

- *Mais justement, c'est parce qu'on n'y arrive pas bien, ou difficilement, qu'on va savoir à quoi il faut faire attention.*
- *Oui, ça permet d'avoir conscience des propriétés.*
- *Et puis, c'est une approche globale des figures symétriques, ça permet de voir si les enfants ont une bonne représentation.*

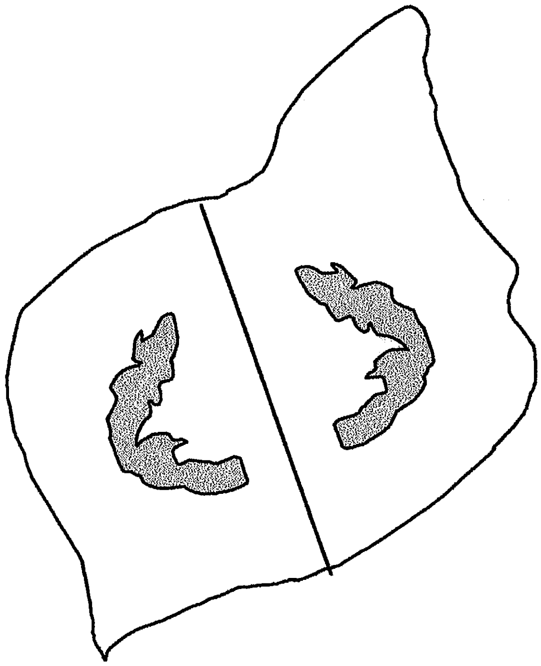
- *Dans la classe, le problème c'est sur la validation des dessins, on va avoir toujours la même discussion : « moi j'accepte le dessin, moi non... » et ce sera des discussions à n'en plus finir. Comment faire pour s'en sortir ?*
- En effet il y a un changement, non pas du mode de validation (toujours par pliage) mais de la marge d'incertitude que l'on se permet dans la superposition des figures.
Il est nécessaire déjà d'expliciter ce changement avec les élèves, dès le début de la présentation de l'activité, en annonçant également que le but du travail n'est pas de produire exactement une figure symétrique, mais de voir à quoi il faut faire attention quand on doit le faire, à quelles propriétés il faut faire attention.
Donc, à la fois les objectifs, mais aussi les moyens de validation sont à repréciser dès le début de la séance.
- *On n'est pas obligé non plus de vouloir tout valider collectivement. Moi je trouve au contraire que l'intérêt c'est l'auto-validation, puisqu'on peut avoir du calque ou plier. En fait c'est sur le travail qu'il faut fixer les objectifs, le tracé à main levée et non sur le résultat final.*

- *C'est bizarre de travailler avec eux à main levée et en évaluation on va leur demander des dessins bien faits, rigoureusement.*
- Attention, il faut bien cerner ce qui est en jeu. Le but dans le tracé à main levée c'est la mise en œuvre de propriétés géométriques de la symétrie axiale, plus ou moins consciemment, et de voir si les élèves se sont construit des images cohérentes de ce qu'est la symétrie axiale.
- *Pourquoi tu ne proposerais pas en évaluation des tracés à main levée ?*
- *Tu n'évalues pas la même chose, que lorsque tu demandes un tracé exact.*

- Pour terminer, on peut également ajouter comme autre moyen de construction, l'usage des gabarits. C'est le même principe de travail que pour les tracés à main levée, sauf que les propriétés de conservation de forme et de taille, ne sont pas visibles car prises en charge par les gabarits eux-mêmes.
On peut prendre de vrais gabarits (des pièces découpées dans du carton), ou des dessins des formes sur du calque, ce sont plutôt alors des dessins de gabarits, mais cela permet peut-être de se détacher progressivement de l'objet spatial.

Pour finir, je rappelle rapidement l'importance de quelques variables didactiques, formes des figures, et orientation de l'axe de symétrie (cf. chapitre 3C).
Je présente le matériel de tâches de peinture et de pliages évidés, pour signaler, qu'en cycle 2, quelques propriétés mentionnées sont déjà bien visibles et repérables par les élèves (conservation de la forme et de la taille ; retournement).

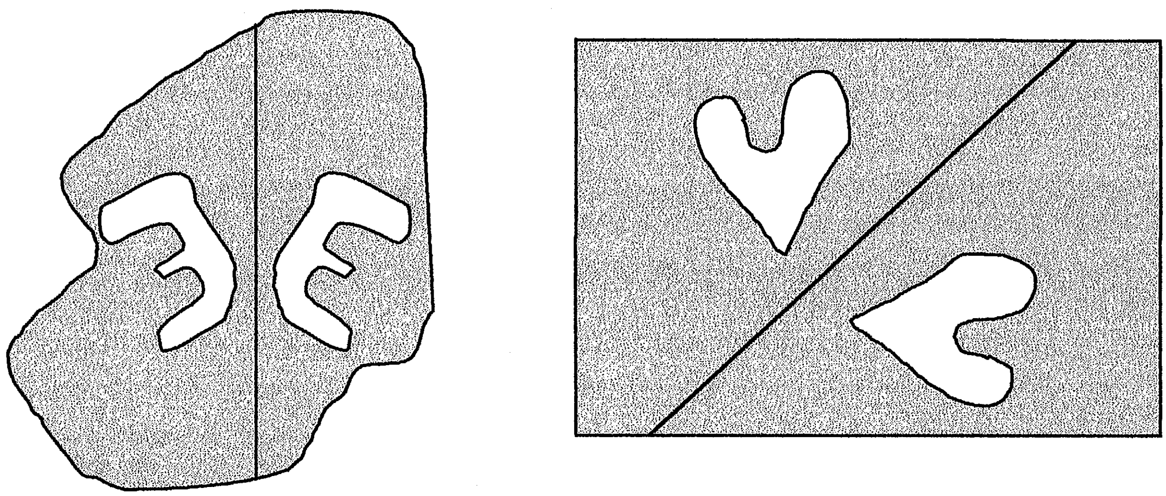
Pour les taches de peintures

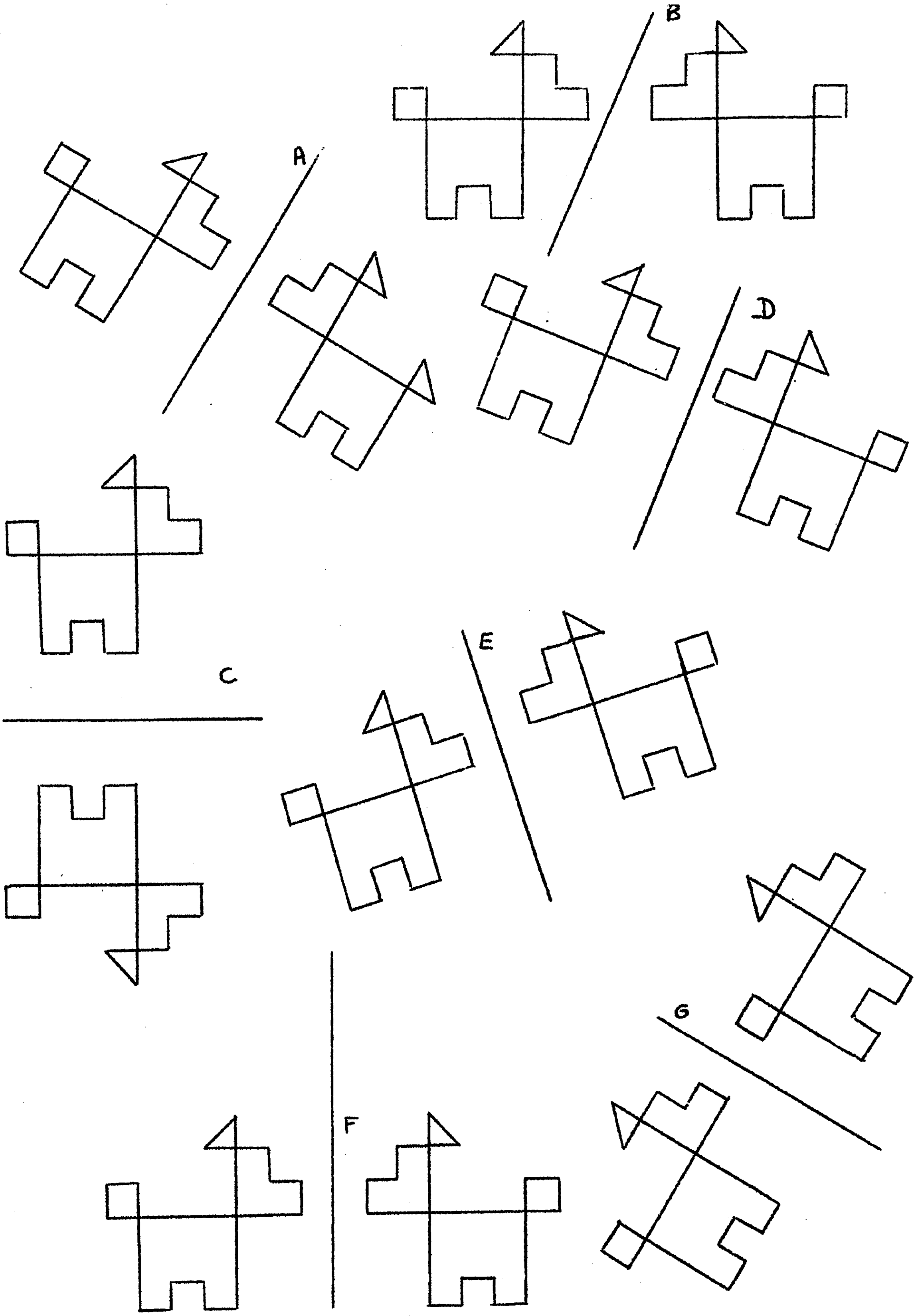


- Un exemplaire sur papier rigide opaque
- Un exemplaire sur papier calque *pour voir par transparence*
- Un exemplaire où seule la tache de gauche apparaît ; un calque est collé le long de l'axe, et le contour de la tache décalqué ; il peut pivoter autour de l'axe, *pour visualiser le retournement.*

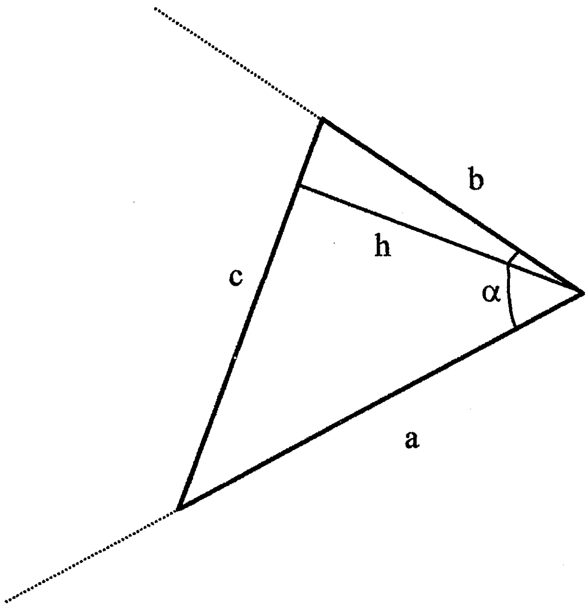
(le tout sur des feuilles à bords arrondis, d'envergure format A3)

Pour les pliages évidés (les découpages sont les parties blanches)




B
A
D
C
E
G
F

Influence d'une erreur d'angle sur la longueur mesurée de la tige



Notons c la longueur de la tige avec les notations marquées sur la figure ci-contre :

$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$; $dc = \frac{ab}{c}\sin\alpha d\alpha$

Un développement limité au premier ordre suffit :

$\Delta c \approx \frac{ab}{c_0}\sin\alpha_0 \Delta\alpha$

Comme : aire du triangle $= \frac{1}{2}ch$

et aire du triangle $= \frac{1}{2}ab\sin\alpha$

on en déduit que $\Delta c = h_0 \Delta\alpha$

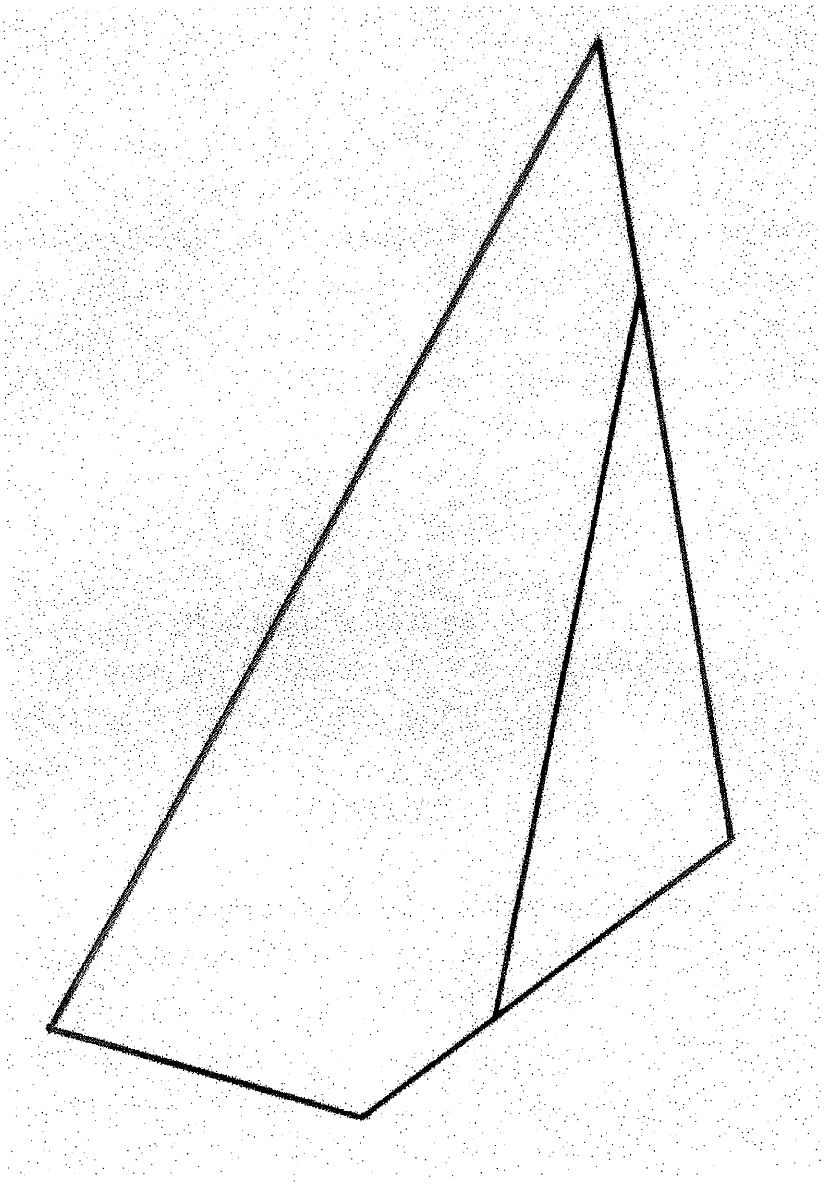
Prenons différentes valeurs pour h_0 et des erreurs d'angle, dans des limites raisonnables, pour l'environnement cour de récréation et environnement papier :

Dans la cour de récréation

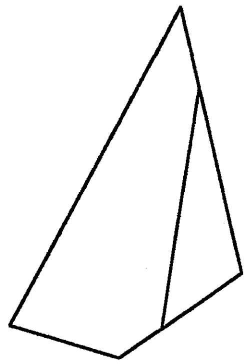
erreur angle en degré	5	5	5
hauteur en mètres	0,5	1	1,5
erreur longueur tige (cm)	4,36	8,73	13,09
erreur d'angle en degré	4	4	4
hauteur en mètres	0,5	1	1,5
erreur longueur tige (cm)	3,49	6,98	10,47
erreur d'angle en degré	3	3	3
hauteur en mètres	0,5	1	1,5
erreur longueur tige (cm)	2,62	5,24	7,85

Sur papier

erreur angle en degré	5	5	5
hauteur en cm	2	5	7
erreur longueur (mm)	1,75	4,36	6,11
erreur angle en degré	4	4	4
hauteur en cm	2	5	7
erreur longueur (mm)	1,40	3,49	4,89
erreur angle en degré	3	3	3
hauteur en cm	2	5	7
erreur longueur (mm)	1,05	2,62	3,67

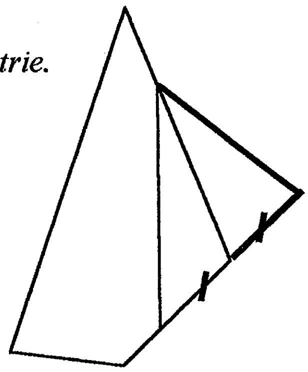


Expérimentation « Terrain et tige »
Extrait de la cinquième séance



En italiques les interventions des élèves (à chaque retour de ligne, un élève différent parle) ;
en caractères normal les miennes.
Toutes les feuilles présentées aux élèves sont au format A3, avec les traits épais pour une bonne visualisation, aimantées au tableau.
Les temps indiquent la durée depuis le début de la séance.

(J'ai affiché au tableau avant de commencer une feuille avec le terrain)
Pour cette dernière séance de travail aujourd'hui nous allons faire une synthèse sur ce que vous avez fait la dernière fois, et j'ai choisi d'organiser les choses à partir des productions que vous avez faites, celles qui etaient correctes et celles qui étaient incorrectes. C'est à partir de l'ensemble de ces productions que l'on va essayer de dégager les différents aspects géométriques qu'il y avait dans les différentes méthodes que l'on a vues.
Le problème, il est besoin de le rappeler, vous vous souvenez on avait travaillé sur un terrain … qui est-ce qui nous rappelle les choses ?
On avait travaillé sur autre chose que des rectangles.
Sur des polygones.
On avait travaillé sur des quadrilatères quelconques.
Il fallait chercher la longueur de la tige.
Il fallait tester les techniques qu'on avait faites.
On a fait aussi de la symétrie
Tu nous avais donné deux méthodes, une qu'on choisissait et une autre, la symétrie.
[…]
On va s'intéresser déjà aux productions concernant la symétrie axiale.
(J'affiche la figure ci-contre)



Est-ce que c'est une méthode par symétrie axiale ?
Faut rallonger la longueur du côté, on aurait la longueur de la tige.
Oui mais là ça fait pas la même longueur.
Ça ne peut pas être exact.
Parce que par là elle est moins écartée, ce n'est pas de la même longueur.
J'ai remarqué que la personne qui a fait ce modèle a plié sa feuille.
Ça c'est moi qui l'ai pliée avant pour préparer déjà. Pourquoi j'ai plié avant, à votre avis ?
Pour regarder si c'est pareil.
Oui pour vérifier si c'est pareil, parce que vous vous souvenez de ce que vous aviez dit la semaine dernière … pour vérifier qu'une construction est bien faite par symétrie axiale …

On regardait par transparence

Voilà, il suffit de plier le long de l'axe de la symétrie et de regarder si les deux parties sont comment ?

Parallèles

Egaux

Symétriques

Superposables

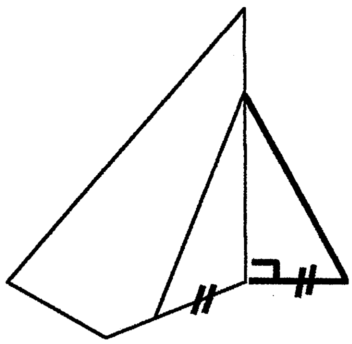
Sont bien l'une en face de l'autre, « superposables » on dit.

Et là effectivement quand on plie (j'effectue les manipulations correspondantes), j'aurai dû le faire sur calque, on ne voit pas très bien ici, les deux parties ne se superposent pas, ne se mettent pas l'une sur l'autre. Donc ça n'est pas une construction par symétrie axiale.

C'est une fausse.

C'est faux, alors.

Oui c'est une construction fausse.



(Je laisse au tableau la figure précédente, et affiche celle ci-contre)

Alors qu'est-ce que vous en pensez ?

Celle-là c'est une vraie, parce qu'on voit bien que si on la plie, on ...

Non.

Alors, on voit bien que si on la plie ... On va faire le pliage et tu pourras venir vérifier toi-même que quand on fait le pliage, par transparence ça ne se superpose pas (je fais le pliage en même temps).

Ça se voit déjà.

Un autre argument qui peut nous permettre de tout de suite savoir qu'il y a un problème ?

Déjà dans celle là y un angle droit, et puis ... dans la vraie il n'y en a pas.

Oui dans le triangle qu'on obtient ici après construction, il y a un angle droit, parce que ça a été construit comme ça, alors que dans le triangle formé par la tige qu'on avait au départ on n'a pas d'angle droit. Or quand on construit par symétrie axiale les deux triangles doivent se superposer, s'ils se superposent ça veut dire qu'ils sont identiques sauf qu'ils sont orientés différemment. Donc si c'était une construction par symétrie, le triangle de départ devrait avoir un angle droit aussi.

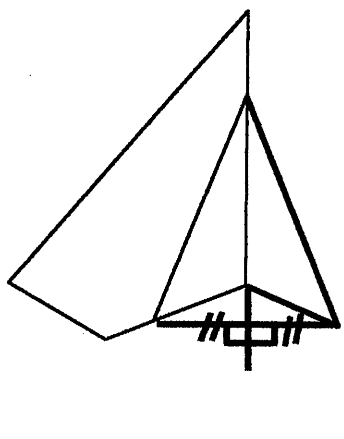
Normalement ça doit pas faire un petit carré là-bas.

Là le carré c'est un symbole que j'ai mis pour dire que ça formait un angle droit, on l'avait vu la dernière fois, vous vous en souvenez.

Bon donc celle-là elle ne marche pas non plus.

(environ 5 minutes)

(Je place une troisième figure au tableau, celle ci-contre)



Une autre proposition.

Oui elle est bonne celle-là.

Oui, oui elle est bonne parce qu'il y a deux angles droits.

Alors, elle est bonne parce que…

Il y a deux angles droits.

Il y a deux angles droits oui, ; est-ce que ça suffit d'avoir deux angles droits ?

Parce que c'est bien aligné.

Ça se voit ; il a fait une bonne construction parce qu'il s'est servi aussi du bas, il a commencé à construire un losange.

Est-ce qu'on pourrait essayer de plier pour voir ?

Oui on va essayer de plier pour voir. Le recours le plus fiable quand on n'a pas suffisamment d'arguments géométriques (je fais le pliage). Je ne peux pas le faire passer à tout le monde, tu regardes, … C'est bon ?

Oui.

Je peux vérifier ? (Il vérifie)

Bon, donc celle là en effet convient, avec un argument par pliage.

Moi je pense qu'il y a une manière de vérifier si c'est possible parce que si on le fait dans la cour, et ben on ne peut pas plier pour voir si c'est bon.

Exactement, et il y a des arguments géométriques pour voir si c'est bon.

Et ben une fois qu'on a fait ça, c'est de refaire exactement la même forme, à partir de ... à partir du triangle qu'on a refait, pour la tige ...

Refaire la forme.

Refaire la forme de la tige à l'intérieur.

Autour de la tige.

Oui, ça c'est une autre méthode, c'est une autre méthode, de reproduire.

Mais je voudrais qu'on reste sur la symétrie axiale.

Pour bien voir ce qui se passe, et les aspects géométriques qui permettent de dire que c'est juste je vais vous proposer une autre production qui a été faite dans la classe par certains d'entre vous, vous dites ce que vous en pensez, ce n'est pas tout à fait la même chose que la première.

(j'affiche la figure ci-dessous)

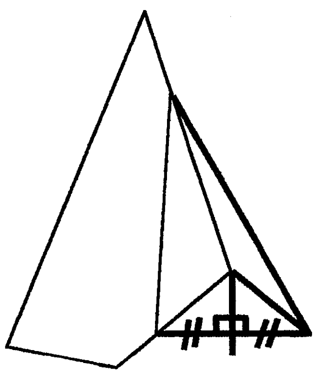
Ça c'est du relief.

Ce n'est pas bon.

Qu'est-ce qui change, qu'est-ce qui ne change pas ?

Ça change parce que le trait est penché alors que l'autre est ... droit.

La forme ..., le côté où il y a le bout de la tige et ben normalement



ça devrait être toujours tout droit, et la personne qui l'a faite l'a dévié.

Oui qui est-ce qui essaie de redire ça, ce qu'a dit Jonathan mais autrement.

Que le triangle n'est pas superposé pareil donc la tige n'est pas, n'est pas ...

C'est que, le trait [le côté b du terrain] *est comme ça, ils l'ont continué tandis que là ils l'ont remis droit.*

Tout à fait, le trait qui a été construit ici (je montre les traits verticaux dans les deux productions précédentes) il est vertical ici et il est vertical ici, mais ce qui change c'est la position par rapport aux côtés du terrain. Ici [production correcte précédente] c'est dans le prolongement, comme tu dis ils ont continué, ils ont prolongé le coté du terrain, alors qu'ici [production erronée ci-dessus] ce trait vertical n'est pas du tout dans le prolongement du coté du terrain, il a été dessiné vertical ; donc il y a une chose qui va être importante dans la construction c'est que ce trait là qui va permettre de construire la perpendiculaire là, il est à construire non pas verticalement ...

Horizontalement.

Non pas horizontalement, mais ...

En diagonale.

Dans le prolongement.

Dans le prolongement, dans le prolongement de l'axe par rapport auquel on plie.

Ici [figure ci-dessus] si on fait le pliage par rapport ... , d'abord par rapport à l'axe vertical, on s'aperçoit très clairement que ça ne marche pas du tout. Si on fait le pliage par rapport au prolongement ...

La figure elle n'est pas bonne.

Non ça ne marche pas.

Ce n'est pas pareil.

Ça l'a dévié

Non.

Ça ne marche pas non plus parce qu'effectivement la construction en bas n'a pas été faite dans le prolongement. Donc qu'est-ce qu'il faudrait retenir la prochaine fois quand on va faire une construction par symétrie axiale, d'important ?

C'est qu'il faut le mettre dans le prolongement.

Oui c'est ce qu'on va prolonger pour faire la construction, c'est de faire ça dans le prolongement, de l'axe, de la ligne de pli.

[...]

(Au tableau les trois figures suivantes)

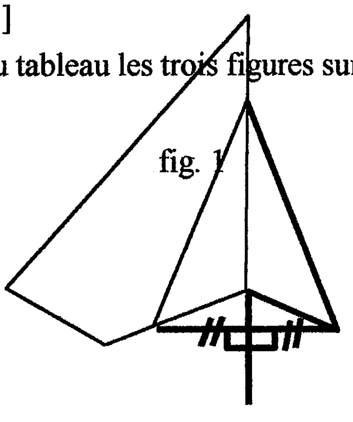


fig. 1

fig. 2

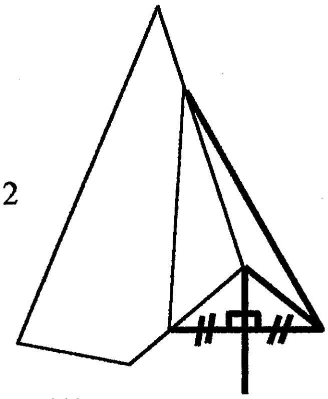
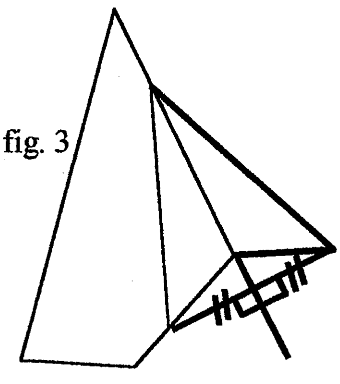
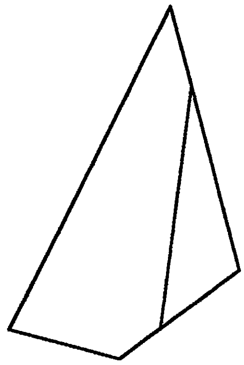


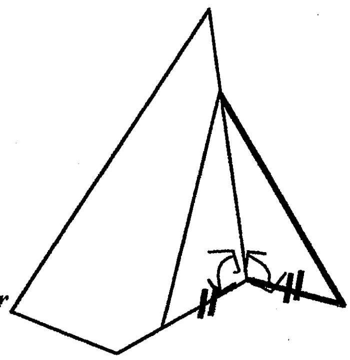
fig. 3



Ici (fig. 1) la construction avait été faite avec ce trait vertical parce que le côté du terrain était lui-même vertical, la personne sur sa feuille l'avait positionné verticalement.
Mais si le terrain est orienté de façon un peu oblique (fig 3), je fais la construction par symétrie normalement c'est à dire, je prolonge le côté du terrain, je construis une perpendiculaire, et ensuite je reporte cette longueur ici, et dans ce cas là voilà ce que ça nous donne comme figure.
C'est les deux mêmes au début et là la troisième
Le premier et le troisième ce sont effectivement les deux mêmes …
Sauf que
A part que
Sauf qu'il y en a un orienté un peu comme ça et un orienté un peu comme ça.
(environ 12 minutes)
[…]



Je voulais vous montrer autre chose sur la symétrie.
Je voulais vous parler d'une autre méthode dont on n'a jamais parlé ici mais il y a un groupe qui avait cherché des choses très intéressantes [Damien et Marine, cf. chapitre 4B. IV-2a].
Dans la cour de récréation ils avaient le terrain comme ça (figure ci-contre)
et puis ils voulaient faire par symétrie, sans du tout utiliser les perpendiculaires Ils se sont dit « il faut qu'on reproduise ce trait là de l'autre coté », et ils se sont dit, « bon on va tricher un peu, on va rentrer sur le terrain », vous avez fait rentrer l'équerre sur le terrain, et ils ont essayé ici de repérer l'écartement de ces deux traits là [les côtés a et b] et puis de le reporter de l'autre coté.



Alors j'ai fait un dessin pour vous montrer ça.
Si on peut rentrer sur le terrain, voilà ce qu'ils ont essayé de faire,
ils se sont dit : l'écartement entre les deux [côtés a et b du terrain],
qu'on appelle l'angle, l'angle entre ces deux traits là on va essayer
de le reproduire de l'autre coté.
Mais si on peut rentrer dans le terrain ils n'ont pas besoin de se compliquer la vie ils ont juste à mesurer directement.
Tu as raison, c'est bien pour ça que, … tout le monde a entendu …
Non
Si on peut rentrer dans le terrain on n'a pas besoin de se compliquer la vie on peut mesurer directement. Ça c'est sûr, mais quand on se dit on va faire de la géométrie quand même, on peut se dire « on rentre sur le terrain, mais on ne mesure pas la tige, et on continue de chercher une méthode géométrique ».

En fait ce n'est pas tellement ce qu'on a cherché, ... [Marine]

Oui, alors moi j'ai fait une extrapolation de votre méthode pour parler d'une méthode plus générale et plus géométrique disons.

Ici cet angle là on va se débrouiller pour le reporter de l'autre coté. Alors on se débrouille comme on peut. Vous vous êtes débrouillés en utilisant l'équerre, voir où vous pouviez la mettre etc., ... et je voulais vous montrer une petite chose, que vous avez peut-être utilisée déjà, ce sont des gabarits d'angles ... ça vous dit quelque chose ?

Ah oui.

On avait fait

On avait fait une étoile et ...

Quand on a fait les pavages polygonaux.

(environ 16 minutes)

Je vais construire un gabarit d'angle avec ma feuille comme une équerre, mais l'angle ne va pas être un angle droit ; ne va pas être un angle de 60 ou 30 ou 45 degrés comme les équerres normales, ça va être un angle d'une certaine mesure que je n'ai pas besoin de connaître ; ça va être cet angle là, cette mesure là (je montre le gabarit de l'angle Â construit avec la feuille) ; quand je le place ici je le juxtapose aux deux traits qui m'intéressent, donc là j'ai exactement la position l'orientation des deux traits. Et bien cette chose là ici je la retourne, je viens l'aligner sur mon premier trait [le support de b] et je peux ensuite avec mon stylo aller construire l'autre trait ici [le symétrique du support de a]. (J'effectue les manipulations au tableau, en même temps que je parle)

Je vous refais le dessin là-dessus (je reprends une feuille A3 où ne figure que le terrain, pour refaire la construction).

Je le refais, je prends une feuille pour faire mon gabarit.

J'aligne un des cotés de la feuille, ici avec un des cotés, puis là au niveau du sommet du quadrilatère par calque je décalque le côté bien droit, puis je plie ma feuille bien droite.

Comme ça ici j'ai l'orientation, j'ai l'écartement, j'ai l'angle entre les deux segments. Je le reporte de l'autre coté, c'est à dire, je positionne le sommet exactement au sommet, en alignant un des côtés, et puis ici je vais aller tracer le long de l'autre coté. Le tracé ici suivant le même écartement, je l'ai fait ici.

Ça ne suffit pas, il manque quelque chose maintenant.

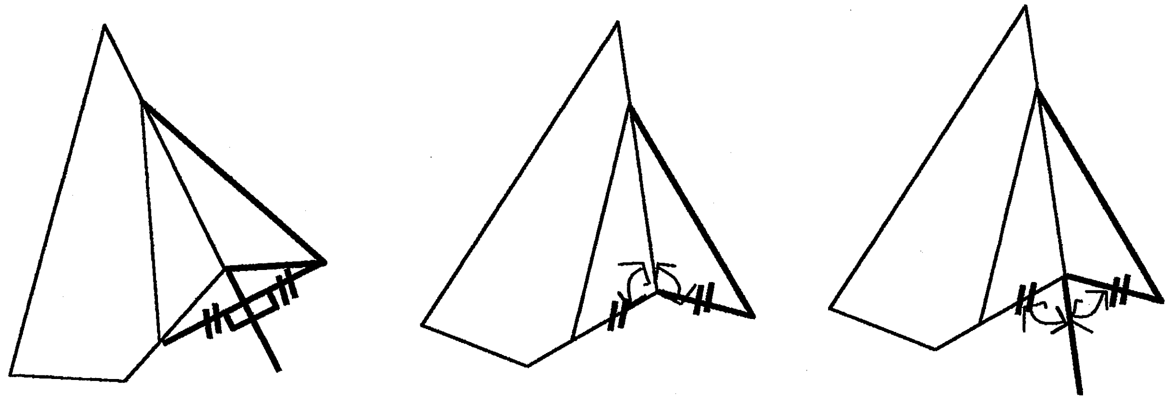
La longueur

Et oui bien sûr, il manque la longueur.

Là il manque quelque chose, je sais que ce trait là par symétrie se retrouve là, mais je n'avais pas la longueur, donc je vais aller prendre mon compas, et reporter la longueur de l'autre côté. Voilà j'ai mon point ici, et il suffit que je relie.

Mais tu rentres, tu rentres avec la feuille à l'intérieur.
Oui ça c'est dans le cas où je rentre avec la feuille, c'est ce que j'ai dit ici, si on peut rentrer sur le terrain (je l'avais aussi écrit au tableau).
Alors je vais vous montrer que l'on peut se débrouiller sans rentrer sur le terrain.
Tu le refais à coté.

(Au tableau sont affichées les figures suivantes, les deux précédentes déjà présentes, et la nouvelle)



On peut se débrouiller autrement avec les angles. La démonstration qu'on vient de faire c'était en prenant l'angle à l'intérieur du terrain, mais on peut se débrouiller autrement en prolongeant le coté et en prenant l'angle ici qui se trouve à l'extérieur. Alors là c'est pareil, je vais faire mon gabarit d'angle, mais sans rentrer sur le terrain. Comment je fais pour ne pas rentrer sur le terrain ? J'aligne ici, je prolonge le côté du terrain, et puis je décalque l'alignement, je plie ma feuille, je vérifie, maintenant je le retourne, je le remets à l'extrémité, là au sommet du quadrilatère, je réaligne avec le premier trait, et puis je trace ; ensuite il faut aller reprendre les longueurs avec le compas ; et puis avec la règle je ne rentre toujours pas sur le terrain, je vais aller relier ces deux points.
Oui ?
C'est la même chose que l'autre !
C'est la même chose mais on n'a pas pris le même angle, dans ce cas là on a pris un angle qui était à l'intérieur, et ici on a pris un angle qui était à l'extérieur en prolongeant le coté du terrain.
(environ 20 minutes)

La dernière fois on avait dit, je crois que c'était la méthode de Frédéric, ils ont reproduit le terrain, mais si c'était ce terrain là, il n'y a avait pas besoin de reproduire tout le terrain, ils ont juste à reproduire les deux lignes où la tige elle touche, on prend juste les deux lignes là.
Alors attends, je reprends ce que tu dis, et tu me dis si je me trompe : il y a des gens qui ont fait une méthode, à savoir reproduire tout le terrain avec la tige à l'intérieur, et toi tu dis ça ne

sert à rien de reproduire tout le terrain, il n'y a qu'à reproduire seulement ces deux cotés là, c'est ça ?

Oui et après on retrace.

Oui alors ça c'est une autre méthode, on va l'aborder maintenant, juste je voudrais qu'on finisse avec la symétrie axiale, est-ce qu'il y a des questions là-dessus, sur la méthode qui utilise perpendiculaire et même distance ou la méthode qui utilise les angles ? Parce que ça c'est de la symétrie axiale aussi, on ne l'a pas dit mais ...

En vrai les deux méthodes c'est pareil sauf que l'autre on a prolongé le trait et on l'a mis à la fin, on l'a mis à l'extérieur au lieu de le mettre à l'intérieur.

Ça revient au même ? Qu'est-ce qui revient au même dans ces deux méthodes là ?

Sauf que là on a prolongé et on l'a mis à l'extérieur pour le deuxième.

La première t'es allée dans le terrain et la deuxième t'es restée à l'extérieur du terrain.

Oui sur ces deux là ? (je désigne les figures centrée et droite ci-dessus) Oui sur ces deux là ça revient au même sauf qu'il y en a une où on a prolongé et l'autre où on est allé à l'intérieur du terrain, oui tout à fait. Mais entre ces deux méthodes là (les figures de gauche et centrée) ?

(Oui parce qu'on a seulement rajouté un trait)

On a prolongé.

Juste prolongé.

Ici on aurait pu faire les petits traits, ce serait à la place des angles droits. Si on avait prolongé le trait.

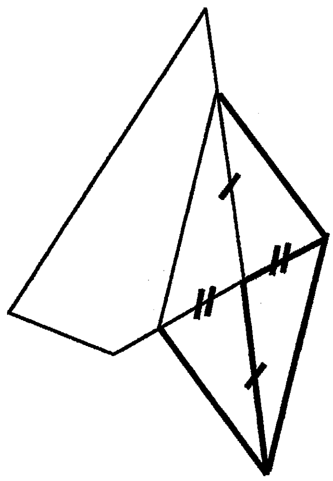
Oui mais ce n'est pas du tout la même méthode. D'un point de vue géométrique, là on utilise la perpendicularité, les angles droits, et là on utilise des angles, qui ne sont pas droits.

En fait le vrai point commun c'est qu'on utilise des gabarits.

Oui, des gabarits d'angles, parce qu'en fait l'équerre avec son angle droit c'est un gabarit d'angle ... sauf que c'est un angle qui est très particulier l'angle droit.

Alors voilà ça c'était pour la symétrie axiale.

(environ 24 minutes)



(Toutes les figures sont enlevées du tableau,
nouvelle production affichée : la figure ci-contre)

La dernière fois, il y a plusieurs groupes qui ont proposé cette construction là, et qui ont écrit comme titre à leur production « construction par symétrie axiale ». Alors, je soumets ça à votre réflexion.

C'est une fausse.

Là le trait il ...

Elle est bonne

D'abord comment ça se lit ça ? Qu'est-ce qui a été fait ? Qu'on puisse la décrire cette figure.

Un losange.

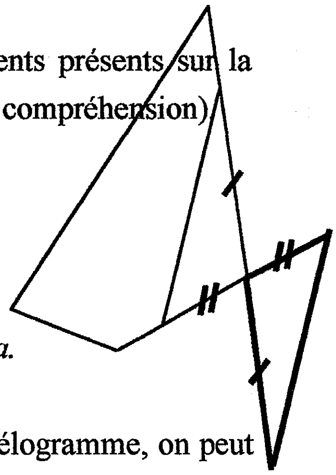
Un rectangle.

Un parallélogramme.

Ce n'est pas un losange.

Oui, ce n'est pas un losange parce … c'est bien un quadrilatère d'accord, ça ressemble vaguement à quelque chose qu'on connaît, mais dans un losange les quatre côtés ont la même longueur. Or ce coté ci et ce coté là visiblement n'ont pas la même longueur donc ce n'est sûrement pas un losange. Mais vous avez reconnu un parallélogramme ; les cotés sont parallèles, ces deux-ci et ces deux-ci, d'accord. Au niveau de la construction, vous vous souvenez, c'est écrit là, ça a été construit par prolongement des côtés et report des longueurs.

En fait, … en fait c'est comme si on oubliait les deux qui sont ici, en fait …



(l'élève se lève et vient montrer au tableau, il fera référence aux segments présents sur la figure ci-contre non présente dans la séance, ici seulement pour faciliter la compréhension)

En fait il faut faire seulement attention seulement à celle-là et celle là.

Oui tu as tout à fait raison.

En fait celle là et celle là on n'en a pas besoin. (même élève)

Oui.

Oui mais ça c'est pour savoir si on a eu bon au moins, pour voir si c'est ça.

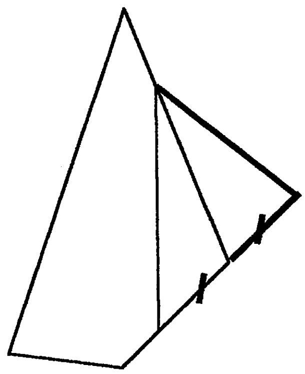
Pour voir si c'est bien parallèle.

Oui si on construit les deux et que vraiment ça n'a pas la tête d'un parallélogramme, on peut se dire qu'on s'est trompé, et ça peut rassurer ; mais il a tout à fait raison de dire que si on prolonge ces deux cotés et si on reporte ces deux longueurs là, ces deux traits là finalement on n'en a pas besoin, il suffit de relier les deux points qu'on a construits et ça nous donne la longueur de la tige.

Oui mais si on a un doute, on peut faire.

Si on a un doute, on peut vérifier si ça ressemble bien à un parallélogramme.

Donc c'est une méthode qui est correcte, et la question que je pose, c'est est-ce que c'est une méthode par symétrie axiale ?



Non

Ben si, si on trace, ah non …

Ben oui, si on enlève le bas du losange, et ben ça fait de la symétrie axiale.

Ça, ça fait de la symétrie axiale ? (je cache la bas avec une feuille blanche de sorte de visualiser la figure ci-contre)

Oui

Non

Vous m'aviez dit sur la première méthode que je vous ai montrée que ça ce n'était pas de la symétrie axiale.

Moi je dis que c'en est.

Ben c'est exactement la même chose si on enlève ça.

C'en est pas de la symétrie axiale.

On va faire le pliage (sur la figure initiale avec parallélogramme). Alors ça c'est une figure vraiment très classique, qui piège souvent, et qui piègera longtemps ; là il n'y a pas du tout d'axe de symétrie et vous apprendrez que …

Oui mais, je peux venir montrer au tableau ?

Oui

Ici et là c'est pas les mêmes longueurs ? (il désigne la tige et le côté opposé à la tige)

Si ce sont les mêmes longueurs

Ben alors c'est à ça et ça qu'il faut ne pas faire attention, c'est pas ça et ça. (Il désigne les divers côtés du parallélogramme).

Non tu as raison c'est bien ce trait là et ce trait là.

Ben Arshe il a dit tout à l'heure …

Non il a dit qu'il s'était trompé de trait.

Non, il a montré les mêmes traits que toi, c'est peut-être moi qui ai mal montré les choses, alors.

Juste je voulais vous faire remarquer, parce que là il y a plein de gens qui ont dit que c'était de la symétrie axiale, c'en est pas …

C'est centrale ?

Oui on avait prononcé ce mot là déjà, on en avait parlé la dernière fois, c'est ce qu'on appelle une symétrie centrale, par rapport à ce point là en fait. La symétrie centrale, vous reverrez ça en cinquième, ce n'est pas « quand on peut plier on retrouve la même figure l'une sur l'autre » ; c'est « quand on peut faire un demi-tour, on retrouve la figure l'une sur l'autre » ; Le parallélogramme, si vous faites faire un demi-tour (je le fais) et bien vous retrouvez exactement la même figure, orientée de la même façon. On ne le voit pas bien ici il faudrait un système de calque pour bien voir, …

Aussi c'est normal parce que là ils ont des doutes, mais aussi quand ils ont fait ça au début ben, c'était sur le rectangle.

Oui

Donc ils n'avaient pas de doute, ils avaient juste à tracer.

Tu as tout à fait raison, quand c'est un terrain rectangulaire et qu'on a un angle droit, et bien effectivement on a des symétries par pliage, et c'est pour ça qu'on peut se tromper.

En fait la seule différence c'est qu'il y en a une qui est à l'envers.

Où ça ?

Ben oui y'en a une qui est à l'envers.

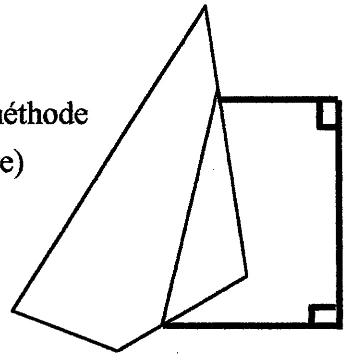
Oui … qui est à l'envers comme ça, quand on se tourne comme ça, alors que la symétrie axiale c'est quand on fait par rapport à un miroir.

Oui.

Et oui ce n'est pas pareil, et des fois on confond les deux.

Bon allez, on a fini sur la symétrie axiale, … et puis on va bientôt terminer.

(environ 30 minutes)



Alors, il y a des gens parmi vous qui ont voulu reprendre la première méthode qui avait été vue « construire un rectangle » (j'affiche la figure ci-contre)

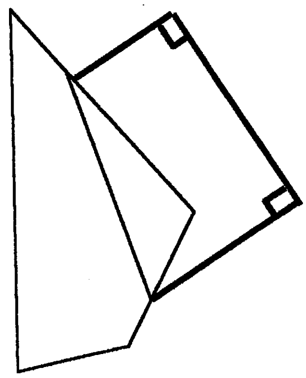
Elle est fausse.

Ce n'est pas un rectangle.

Non.

Pourquoi ce n'est pas un rectangle ?

Parce qu'il y a un coté, ... la tige qui est dans le quadrilatère elle est en diagonale et celle qui est parallèle avec ... euh pas parallèle ...



Parallèle avec le bord de la feuille …

Oui, elle est droite elle devrait être un peu penchée.

Tu peux redire la même chose si je place la feuille un peu comme ça ?

Oui.

Si par exemple on tourne complètement la feuille, on va bien voir que ce n'est pas un rectangle, par rapport au trait en bas.

Et puis même ...

Mais donnez moi un argument géométrique.

Le trait bas il est plus grand que là haut alors que dans un rectangle ...

Celui qui est parallèle à celui d'en haut il n'est pas de la même longueur.

Il y a une largeur qui n'est pas ...

Les largeurs ne sont pas égales.

Ce trait là ici et ce trait là ici ne sont pas de même longueur, or dans un rectangle, on sait que les cotés qui sont opposés ont forcément la même longueur, donc ça ne peut pas être un rectangle. D'accord ça c'est un bon argument. Il y a un autre argument encore que l'on peut donner.

Il y a deux côtés qui ont des angles droits, et les deux autres ils n'en ont pas.

Tout à fait, il n'y a que deux angles droits et les autres cotés ne forment pas des angles droits, or dans un rectangle il y a forcément quatre angles droits, donc ça ne peut pas être un rectangle, très bien. Bon, on range cette procédure là alors.

C'est bon alors ? Elle était bonne celle là ?

Ah non (protestation des élèves).

Réfléchis.

Comme ça n'est pas un rectangle, il a raison on n'avait pas fini, comme ça n'est pas un rectangle la longueur de la tige *(n'est pas la même que l'autre)* n'est pas la même que cette longueur là, parce qu'il faudrait pour que ce soit la même si c'était un rectangle ; on n'est pas là dans un rectangle, on n'a pas d'angle droit, donc ces deux cotés là n'ont pas la même longueur. On va vérifier rapidement ici, voilà là ça fait à peu près, ça fait 20 et là ça fait 21 ; là on est dans des choses très petites.

En fait on aurait pu faire un rectangle mais c'est le rectangle qui est mal placé ?

Il aurait du être placé comment le rectangle ?

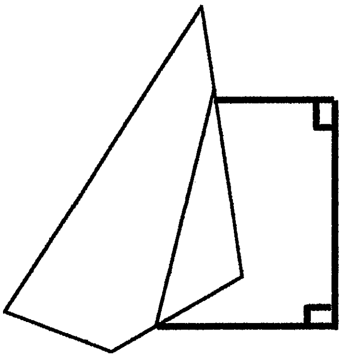
Horizontalement

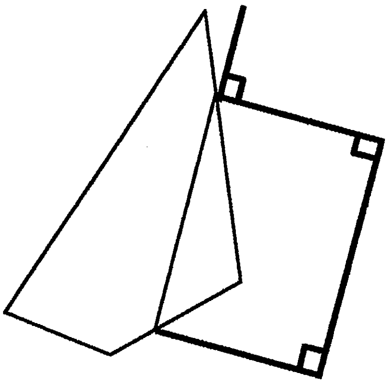
Parallèlement à … (se déplace au tableau)

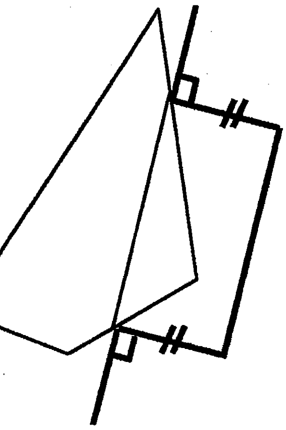
(environ 32 minutes)

[…]

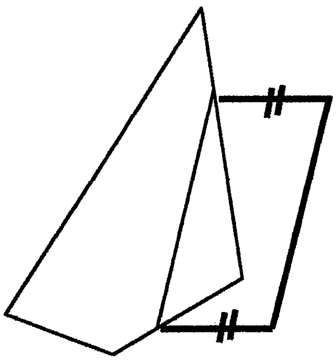
Les minutes suivantes sont consacrées à l'étude des figures ci-dessous.



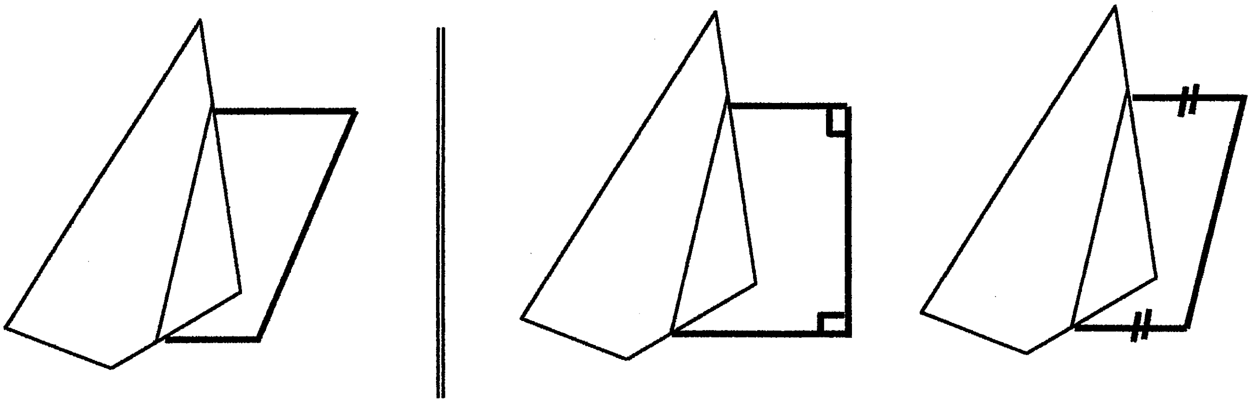




Puis suite à l'intervention d'un élève au tableau, nous travaillons sur celle-ci :

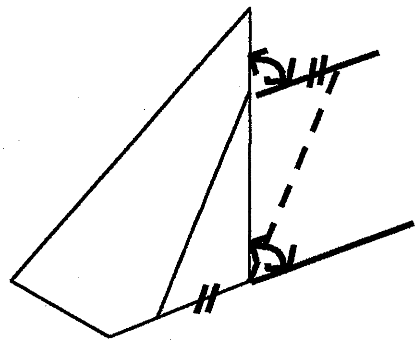


Ensuite assez rapidement nous discutons autour de la figure de gauche, puis sur les différences entre celles centrée et à droite.



(environ 44 minutes)

Et nous terminons par la figure ci-dessous, avec à nouveau usage d'un gabarit.



(environ 48 minutes)

Stage de Formation Continue « Maths/Techno », avril-mai 2001
Indications concernant le déroulement des trois jours de travail

Jeudi 3 mai, matin

Les kaléidocycles[1]

- Premier temps (environ 1h20) : RECHERCHE

Tous les stagiaires aboutissent à un objet, en aboutissant chacun à des étapes différentes de la recherche, repérées parmi les suivantes :

- Construction des pyramides une à une, à partir d'un patron, puis assemblage des pyramides au fur et à mesure.
- Construction de deux pyramides assemblées, en un seul morceau, avec recherche d'un patron.
- Construction de quatre pyramides assemblées, par assemblage de deux patrons trouvés précédemment.
- Recherche d'un patron général, par assemblages des patrons précédents.

- Second temps (environ 20 minutes) : DISCUSSION

Discussion autour de l'intérêt d'un tel travail en classe, lecture d'une synthèse réalisée dans une classe de CM2 (appendice 1), regard sur le livre d'Escher[2], et autres remarques (conditions base égale hauteur, ... appendice 2) ...

- Troisième temps (environ 1h) : REALISATION TECHNIQUE

Construction individuel d'un kaléidocycle, à partir du patron le plus économique (celui fourni dans l'appendice 2), du matériel de qualité, des conseils techniques de réalisation rapide (pour plastifier, coller, plier, ...). Où l'on s'aperçoit dans cette phase que la tâche consiste en une reproduction de figure plane, qui ne va pas de soit tant que cela.

---

[1] Travail inspiré par les articles autour de ce thème dans « Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques », tome IV, COPIRELEM, Ed. IREM de Paris VII, mars 1996.

[2] M.C. ESCHER KALEIDOCUCLES, par Doris Scattschneider et Wallace Walker, Ed. TACO.

Jeudi 3 mai, après-midi

Patrons de solides[3]

- LES SITUATIONS D'INTRODUCTION (environ 1h15)

Les numéros entre parenthèses correspondent aux numéros des paragraphes du chapitre 3B dans lesquels se situe les analyses didactiques

- A partir d'une situation de construction (II)
- Mises à plat de solides (III.1)
- « Démonstration visuelle » (III.2)
- Habillage de solides (chapitre 3A, II.2)
- Les planches à découper (que l'on trouve dans le commerce)

- Mises à plat de solides, CONSTRUCTIONS de patrons (environ 45 minutes)

Des solides complexes donnés aux stagiaires, avec la consigne de réaliser plusieurs patrons de ces solides. Dans un premier temps sans matériel, dans un second temps avec du matériel pédagogique (Clixi et Lokon).
Etude didactique et pédagogique d'une telle tâche en cycle 2 ou 3.

- LECTURE DOCUMENT DE FORMATION (environ 45 minutes)

- Lecture du document « Reconnaître si une représentation plane est ou non un patron de solide » (fiche 5 de l'annexe 2, chapitre 1). Avec la consigne d'indiquer en quoi ils considèrent que ce peut être ou non un bon document de formation, les éléments signalés leur paraissant pertinents, les manques, ...
- Discussion collective
- Reprise très rapide et succincte sur feuille d'éléments de discussion.

L'essentiel de la discussion a porté sur « le statut des erreurs » et sur l'articulation nécessaire ou non de l'étape de « manipulation » et de l'étape « faire dans sa tête ».

[3] La base de ce travail est entièrement développée dans le chapitre 3B.

Vendredi 4 mai, matin

Explicitation des connaissances en jeu autour de la notion de patron de solide.

A partir d'un regard dans les manuels de CE2, CM1 et CM2 (livres élève et livres maître), de la collection Nouvel Objectif Calcul, les stagiaires ont pour consigne de dégager les objectifs d'apprentissage, en les formulant de façon précise et adaptée pour la classe. En fait, on ne trouve pas ces formulations dans le livre, mais quelques activités sont pertinentes pour les mettre en évidence. Après un regard général, on se centre alors sur les activités p146-147 du manuel de CE2. Nous établissons un document qui correspond au paragraphe I du chapitre 3B.
(environ 2h30 pleines sans interruption)

Vendredi 4 mai, après-midi

Activités autour des solides

- CONSTRUCTIONS AVEC DU MATERIEL PEDAGOGIQUE (environ 20 minutes)

A la fois pour que les stagiaires découvrent du matériel existant, et d'autre part pour constituer un stock de solides pour travailler sur les activités qui suivent.

- RAPPELS DE GEOMETRIE (environ 20 minutes)

Sur quelques définitions en géométrie (polyèdres, réguliers, ...) et cela permet de décrire et de s'approprier les solides. On rappelle également des définitions de la famille des pyramides et de celle des prismes. En remarque, j'indique en quoi cette classification est conceptuelle, et ne correspond pas aux appréhensions des élèves (appréhension essentiellement visuelle des solides). Cela permet de faire des remarques sur les objectifs des activités de classement proposées à l'école.

- JEU DU PORTRAIT (environ 45 minutes)

Pour un détail de diverses modalités, des objectifs et de compte rendu de travaux en classe, voir le document en appendice 3, non distribué ici mais souvent utilisé en formation initiale.

Ici une personne sort de la salle, les autres se mettent d'accord sur le solide choisi, que cette personne doit reconnaître en posant des questions ...
Cela permet aux stagiaires de se rendre compte, de l'activité de chacun : pour ceux qui répondent il leur est nécessaire d'avoir une bonne représentation du solide, ou avoir pris des

notes sur les informations. Pour celui qui cherche, décrire, formuler, en utilisant un vocabulaire géométrique correct, ...
On fait trois parties, (en notant toujours les questions au tableau) à la fois pour avoir suffisamment de questions différentes, et montrer en quoi le choix du solide est important pour la recherche, la formulation, ou la mise en commun, l'exploitation mathématique, ...
On repère qu'en général, les questions portent essentiellement sur la nature et le nombre de faces, mais jamais sur le nombre d'arêtes et de sommets, questions en effet peu efficaces pour reconnaître un solide.
Se pose alors la question de « quelles autres activités pour travailler plus spécifiquement sur arêtes et sommets ? » et permet la transition avec la suite.
Nous concluons sur *le jeu du portrait comme activité générique des activités de description et de formulation.*

- UN JEU DE COMMANDE (environ 15 minutes)

Raconté aux stagiaires et non réalisé avec eux.
Il s'agit d'une activité de reproduction de solides en utilisant du matériel spécifique, en commandant le matériel imposé en quantité nécessaire et suffisante.
L'intérêt d'une telle activité porte sur la nature du matériel utilisé pour le solide modèle et pour la reproduction. Car certains matériels sont des matérialisations de faces pleines (opaques), d'autres de faces évidées, d'autres d'arêtes et de sommets. Ainsi par exemple, si on dispose d'un modèle en plein, on repère et on dénombre plus difficilement les arêtes et sommets que les faces qui de fait sont déjà matérialisées. A l'inverse, si on dispose d'un solide modèle évidé, les faces ne sont pas matérialisées, il faut faire un effort pour les imaginer. Reproduire un tel solide avec du matériel plein nécessitera un repérage plus fin que le reproduire avec le même type de matériel.

Construction du matériel de « démonstration visuelle » pour introduire la notion de patron de solide

(environ 1h15)
C'est un travail de construction technique d'un matériel qu'ils pourront utiliser dans leur classe. Il s'agit de construire un solide de dimensions raisonnable pour être visible de loin, deux « vrai » patrons, et un « faux » patron, avec les mêmes dimensions, dans du papier de qualité, plastifié, afin de pouvoir réaliser la « démonstration visuelle » permettant de définir ce qu'est un patron de solide. (cf. chapitre 3B, annexe 2)

Lundi 7 mai, matin

Représentations de solides en perspective

Voir le compte rendu spécifique de la séance, chapitre 3B, annexe 6

Lundi 7 mai, après-midi

Autour de la symétrie axiale

Voir le compte rendu spécifique de la séance, conclusion annexe 1.
(environ 1h20)

La situation « terrain et tige »

Réalisée en activité avec les stagiaires. (environ 1h20)
Le temps a été consacré à la recherche (quadrilatères quelconques dans la cour), et la mise en commun des diverses procédures.

Document de M. Fénichel et M. Pauvert, pour (mais non cité) *« Se former pour enseigner les mathématiques »*, tome 1, Problème et géométrie, Ed. A. Colin, p154-161

- Mathématiques : Géométrie

Ce que nous avons découvert sur les triangles à partir de notre projet : "la construction du polyèdre"

① Un triangle est un polygone à 3 côtés.

② Il existe plusieurs sortes de triangles :

ⓐ- Le triangle dont nous avons besoin a 2 côtés égaux → C'est un triangle isocèle.

ⓑ "Notre équerre", c'est un triangle qui a un angle droit (90°) → triangle rectangle

ⓒ Il existe aussi des triangles ayant ~~trois~~ 3 côtés différents et des angles ≠ 90° → triangle quelconques

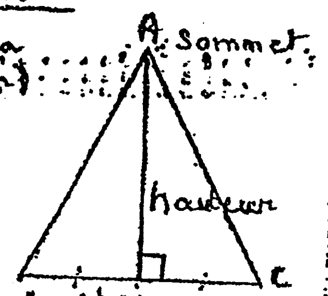
ⓓ Le triangle ayant 3 côtés égaux est appelé "régulier" ou équilatéral.

Construction du triangle isocèle et remarques.

Deux "façons" ont été trouvées.

1ère : avec la règle et l'équerre

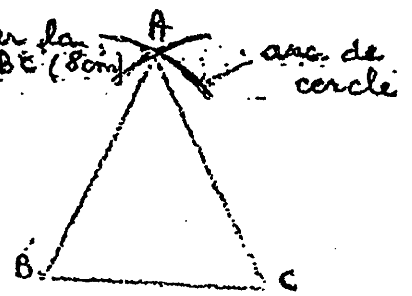
Tracer la base (8cm)



1. Partager la base en 2 parties égales
2. Tracer une perpendiculaire à cette base (la hauteur)
3. Prendre 8 cm sur la hauteur
4. Tracer les côtés.

2ème avec le compas.

Tracer la base BC (8cm)



1. Prendre une ouverture suivant la mesure du côté voulu (ici : 9 cm).
2. Placer la pointe du compas en B et tracer un arc de cercle
3. Même chose en C. Les 2 arcs de cercle se croisent en 1 point, le sommet.
4. Tracer les côtés.

<u>Quelques éléments pour construire certains kaléidocycles</u>
<u>extraits de *M.C. ESCHER KALEIDOCYCLES, par Doris Schattschneider et Wallace Walker, Ed. TACO*</u>

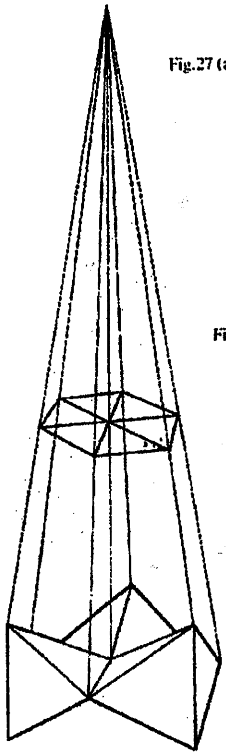


Fig.27 (a) Projection centrale

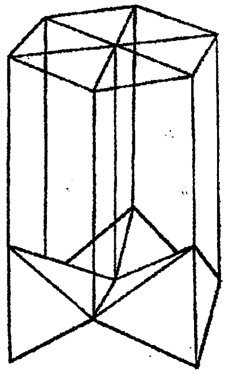
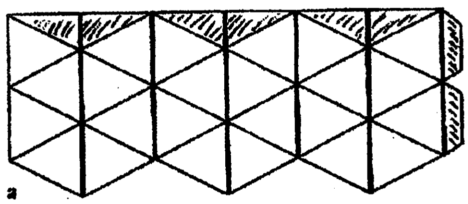


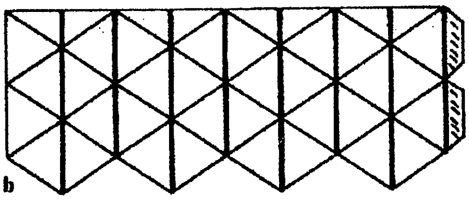
Fig.27 (b) Projection parallèle

Kaléidocycle hexagonal
contrainte sur le triangle isocèle :
la longueur de la base doit être égale à la longueur de la hauteur



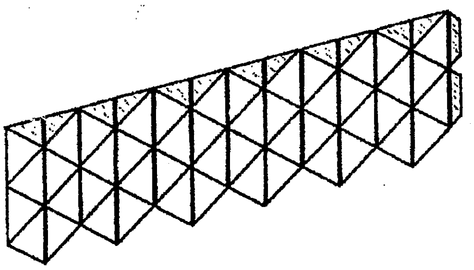
a

Kaléidocycle carré
contrainte sur le triangle isocèle :
la longueur de la base doit être égale au produit de « racine de 2 »par la longueur de la hauteur



b

Kaléidocycle torsadé



Travail avec des solides : le jeu du portrait

Bilan réalisé à partir des travaux des professeurs des écoles stagiaires deuxième année de l'IUFM de Livry-Gargan (93) ; dans des classes de tous niveaux de l'école primaire Langevin, Clichy sous bois, janvier février 1998.

Principe du jeu et éléments pour la préparation

Un solide est choisi parmi un ensemble de solides présents. Il s'agit, à partir de questions, de retrouver le solide choisi.

Préparation matérielle : quelques éléments à prendre en compte

- la nature des solides, bien évidemment par rapport aux objectifs visés
- la taille des solides, pour une bonne visibilité par tous les enfants
- la taille des solides les uns par rapport aux autres, éviter les disproportions, sauf si un travail sur les dimensions est recherché, mais ce n'est pas le cas ici.
- la position des solides dans la classe, également pour une bonne visibilité, ils peuvent être posés sur un support rehaussé, sur un socle au milieu de la classe, accrochés au tableau, suspendus au plafond ...

Les solides sont numérotés pour des raisons de commodité, mais on pourrait envisager qu'ils soient repérés par leur nom générique. Certains peuvent être connus, d'autres non, le maître peut favoriser l'utilisation de leur nom.
Il est important de présenter le matériel dans un premier temps. Que tous les enfants puissent voir chaque solide suivant toutes ses faces. L'observation première permet la description future. (Cette activité fait donc suite à des activités d'observation, de description, de manipulation.)

La règle du jeu, bien que facile à retenir, doit être écrite, elle reste en référence tout au long du déroulement. Les enfants se sentent plus responsables des règles, et plus attentifs à leur respect. Plus généralement, dès qu'il y règles, règlement, contraintes, il est important de faire intervenir l'écrit. C'est une mémoire à laquelle chacun peut se reporter à tout moment.
Dans la règle de ce jeu, il est important d'indiquer :
- le choix d'un solide, le système questions / réponses, les conditions de proposition d'un nom.
- et surtout la nature du questionnement autorisé, *« les questions doivent porter sur des propriétés géométriques des solides »*. C'est une façon de préciser le cadre de travail de l'activité et déjà les objectifs visés.

Propositions de fonctionnement

- Un fonctionnement collectif

La maîtresse choisit un solide et note son nom ou son numéro à un endroit, que l'on consultera pour vérifier une proposition. Les enfants posent des questions que la maîtresse peut noter au tableau (pour mémoire et déjà en prévision d'un petit bilan à la fin du jeu), elle y répond au fur et à mesure, et les enfants font des propositions.
Ce fonctionnement a quelques désavantages, il permet difficilement à chaque élève de s'investir dans l'activité de raisonnement, lien entre les questions, déduction, ... souvent prise en charge par la maîtresse. Et la gestion du groupe est plus délicate. Cela peut constituer quand même une première approche du jeu.

- Fonctionnement en groupe

Par équipe. Chaque équipe pose une question chacune son tour. Il faut se concentrer dans l'équipe pour bien choisir la question. Ensuite chaque équipe après réflexion fait une proposition, qui est validée par le restant de la classe. Cela permet à chaque groupe d'expliquer sa logique et son choix, et d'être éventuellement remis en cause par les autres groupes.

Variante :
chaque équipe peut poser au plus X questions, qu'elle écrit sur une feuille de papier. La maîtresse répond également par écrit, dans chacune des équipes. Les propositions et validations se font comme précédemment collectivement.
L'intérêt de faire intervenir un écrit collectif (au sein d'une équipe) avec X questions, permet à l'ensemble des enfants de s'exprimer, les astreint plus ou moins à se mettre d'accord, plus facilement que si les questions restent orales, et favorise les échanges au sein de l'équipe.
Difficultés de cette variante pour une mise en œuvre en CP où se pose des problèmes de codage par écrit (à moins d'un travail préalable).

Autres propositions :
- le choix du solide se fait par tirage au sort d'une étiquette dans une enveloppe, portant le nom (ou numéro) du solide. C'est peut être plus motivant, cela permet aussi de dégager la maîtresse de cette responsabilité. D'autre part cela n'empêche nullement d'atteindre les objectifs, si le jeu est repris assez souvent pour que suffisamment de solides soient choisis.
- dans le fonctionnement par équipe, l'attribution de points pour une proposition correcte, et l'idée d'équipe gagnante, peut de par l'enjeu favoriser une plus grande attention au choix des questions posées.

Compte rendu et analyse de travaux d'élèves

De la difficulté de se dégager des objets du quotidien

L'objectif de cette situation est d'amener les élèves à adopter un point de vue géométrique sur les solides, à dégager certaines propriétés géométriques permettant de les décrire.

Or a priori, il n'y a aucune raison pour que les enfants le fassent naturellement, surtout dans les petites classes. Pour qu'ils se détachent de « est-ce que c'est une couronne, un bâtiment, une tente, une boite, un chapeau .... » il est important :

- d'utiliser un vocabulaire non ambigu : solide plutôt qu'objet,
- de préciser dans la consigne que les questions ne peuvent pas porter sur la ressemblance à des objets du quotidien, mais doivent porter sur des aspects descriptifs, des propriétés géométriques.

Il ne faut pas hésiter à utiliser le vocabulaire adapté : sinon croyant simplifier pour une meilleure compréhension, on favorise des références inadaptées pour de bonnes représentations. Au contraire l'exigence du vocabulaire permet de cadrer plus justement la situation, elle permet aussi aux enfants de se l'approprier plus facilement et rapidement.

De la difficulté à bien distinguer les formes planes des formes spatiales

« Est-ce que c'est un carré, un triangle, un cercle, ... »

La confusion entre le solide et la nature de ses faces est fréquente à tous les niveaux.

C'est assez naturel ; la plupart des travaux en géométrie depuis la maternelle se fait autour des figures planes (à regretter d'ailleurs). D'autre part quand on s'intéresse aux faces d'un solide, on travaille effectivement dans le plan défini par cette face. D'où l'ambiguïté. Ici encore il faudra utiliser le vocabulaire adéquat, les solides ne sont pas des « figures », mais bien des « solides ».

Il est donc important ici de bien dégager la notion de face, en indiquant effectivement qu'une face est une figure plane, *« le solide a une face carrée, une face triangle, une face cercle, une face disque, ... »*, mais l'association dans l'espace de ces faces, constitue un solide, et n'est plus une figure plane.

La maîtresse peut aussi avoir prévu des figures planes, qu'elle utilise lors du jeu du portrait, pour permettre la distinction entre « le solide est un carré » et « le solide a une face carrée ». Il est judicieux alors de choisir un autre solide que le cube, pour faire cette remarque. En effet le cube a toutes ses faces carrées, donc la distinction est peu pertinente. Par contre elle se comprend mieux pour le prisme à base hexagonale et faces carrées. Visiblement ce solide n'est pas carré. D'autre part il est préférable d'éviter de découper les figures planes dans du carton ou autre, car cela leur confère plus facilement un statut d'objet (matériel), mieux vaut représenter les figures planes sur une feuille, l'aspect plan est plus présent (ou découper dans du bristol).

<u>Le problème du « pointu » et des sommets</u>

« Est-ce que le solide est pointu ? Est-ce qu'il a une pointe ? Un pic ? Une aiguille ? Est-ce qu'il a un sommet ?... » Que recouvre ce vocabulaire ?

Il peut être lié pour certains élèves à la *notion mathématique de sommet.* Ceux qui considèrent que le cône est tout aussi pointu que le cube ou le prisme à base hexagonale, sont sûrement proche de cette idée de sommet.

Si par contre le pointu pour d'autres élèves est uniquement associé au cône ou à la pyramide, c'est à dire à un solide présentant un point situé au plus haut du solide quand il est posé sur la table, alors ce point(u) est plus synonyme de *sommet au sens quotidien du terme* en référence au sommet d'une montagne par exemple.

L'utilisation du mot pic pose les mêmes problèmes. Certains enfants l'utilisent pour sommet au sens mathématique, et alors le cube a bien des pics ; d'autres l'utilisent au sens courant et alors le cube n'a pas de pic. C'est par les précisions apportées par les enfants, en leur demandant d'illustrer ce qu'ils disent par des exemples, de montrer les solides, ... que l'on peut savoir ce qu'ils ont en tête, et apporter par conséquent des précisions.

La maîtresse doit faire évoluer le vocabulaire, surtout lorsqu'il est inadapté et ambigu. Elle ne peut aucunement l'utiliser elle-même. A la question « est-ce qu'il est pointu », il est nécessaire de renvoyer un questionnement pour faire préciser à l'élève l'usage qu'il fait de ce mot (géométrique, ou courant). Intégrer aussi les autres enfants à ce moment d'explicitation est tout aussi nécessaire.

<u>Le problème du « rond »</u>

« Est-ce qu'il est rond ? Est-ce qu'il a une face ronde ? Une face arrondie ? Est-ce qu'il tourne ? » Ici la difficulté vient de l'utilisation d'un même mot dans deux cadres différents, le plan et l'espace.

Quand on dit que la sphère est ronde, la référence à l'espace est évidente. Mais quand on dit que le cône ou le cylindre est rond, de quelle face parle-t-on ? Les planes, ou la non plane ?

Certains élèves parlent également de rond à propos du prisme à base hexagonale. Et en effet l'hexagone étant régulier, inscriptible dans un cercle, il donne un aspect rond au solide. Ici encore il est nécessaire de renvoyer un questionnement aux élèves leur permettant d'expliciter et de saisir ces nuances.

L'usage du mot « circulaire » pose les mêmes problèmes que précédemment. Par contre le mot « disque » renvoie explicitement à une surface plane. Ainsi une question du type « Est-ce que le solide a une face en forme de disque ? » ne prête pas à confusion.

« Est-ce qu'il tourne ? » question également à préciser. Tout solide peut tourner sur lui-même, beaucoup d'entre eux sont invariants par rotation.

« Est-ce qu'il roule ? » déjà plus proche de l'idée qu'il existe au moins une face non plane. Cette question pourrait renvoyer à la sphère et aux surfaces cylindriques ; cependant, on peut toujours se débrouiller pour faire « rouler » un cube, en le lançant assez fort … Il vaut mieux se dégager de cette référence spatiale, pour revenir à la notion de face plane et face non plane.

« Est-ce que le solide est plat ? »

Deux interprétations possibles : cela veut-il dire « toutes les faces sont planes » ou bien « il existe au moins une face plane » ? Ce n'est pas tout à fait la même chose : dans le premier cas le cône n'est pas plat, dans le second cas le cône est plat. Ici encore à préciser.

D'autres questions posées plus explicites

- présence d'angle droit
- nombre de faces
- « est-ce qu'il a des faces identiques ?», « est-ce que deux faces sont pareilles ? »
- présence et/ou nombre d'arêtes
- « Est-ce qu'il a un angle ? » sûrement en référence à la présence d'angle pour une surface plane, ainsi la sphère, le cylindre, les cônes n'ont pas d'angle. Mais on pourrait par exemple définir l'angle formé par une face plane et la face courbe du cylindre. Cela se complique alors, mieux vaut rester dans le premier cas : angle dans un plan.
- « Est-ce que c'est la même dimension de tous les côtés ? Est-ce que les mesures sont égales ? Est-ce qu'ils sont tous de la même hauteur ? »
  Parle-t-on des faces ou des arêtes ? Attention le mot « côté » est ambigu et ne permet pas de préciser. Ici la confusion est grande bien que l'introduction des longueurs puisse être pertinente.

RESUME :

L'étude porte sur les questions didactiques liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire.
La première partie est consacrée à une présentation du cadre de la théorie des situations, au travers essentiellement les notions de milieu et de situation fondamentale, et à une précision des différentes problématiques pour caractériser nos rapports à l'espace et à la géométrie. Ces outils vont permettre les analyses ultérieures.
La seconde partie approfondit les points concernant l'usage des dessins en géométrie au regard des problématiques géométrique et de modélisation.
La troisième partie est un développement de la notion d'ostension pour en établir des éléments permettant qu'elle soit un procédé didactique maîtrisé. Les patrons de solides et la symétrie axiale sont les deux thèmes d'appui, d'avancée et d'illustration des propos.
La quatrième partie rend compte d'une expérimentation menée à l'école élémentaire autour d'une situation de recherche, afin d'examiner une situation fondamentale de la géométrie comme modélisation de l'espace. Des éléments de régularité dans les interactions des élèves avec le milieu sont dégagés, permettant de poursuivre la réflexion pour l'élaboration de situations didactiques.
L'ensemble montre que la problématique pratique est incontournable à ce niveau de la scolarité et que l'enseignement doit prendre appui sur ce fait pour faire entrer les élèves dans une problématique géométrique ou de modélisation. L'ostension maîtrisée peut alors servir à la dévolution d'un milieu permettant une validation par des savoirs de géométrie.

MOTS CLES :

Enseignement, Apprentissages, Connaissances, Savoirs, Ecole élémentaire, Géométrie, Mathématiques, Espace, Didactique, Théorie des situations, Structuration du milieu, Situation fondamentale, Dévolution, Situation de modélisation, Ostension, Manipulation, Images, Dessins géométriques, Représentations, Patrons de solides, Représentations en perspective, Symétrie axiale.

Editeur : IREM Université PARIS 7 Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : R. CORI
2 Place Jussieu. Case 7018
75251 PARIS Cedex 05
iremp7@ufrp7.math.jussieu.fr
www.irem-paris7.fr.st
Dépôt légal :2001
ISBN : 2-86612-218-6